Řešení úloh 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Blažek (7), V. Houdek (4), P. Šedivý (3, 5, 6), I. Volf (2) a B. Vybíral (1)

1. a) Osa válce bude kmitat ve vodorovném směru s amplitudou výchylky $x_{\mathrm{m}} = R\varphi_0$, a s amplitudou rychlosti $v_{\mathrm{m}} = \omega x_{\mathrm{m}} = \dfrac{2\pi R\varphi_0}{T}$, kde ω je úhlová frekvence kmitů a φ_0 úhel pootočení v radiánech.

Tomu odpovídá amplituda úhlové rychlosti $\Omega_{\mathrm{m}} = \dfrac{v_{\mathrm{m}}}{R} = \dfrac{2\pi\varphi_0}{T}$.

Pro dané hodnoty: $v_{\mathrm{m}} = 0{,}0305\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\Omega_{\mathrm{m}} = 0{,}122\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. **3 body**

b) Vyjdeme ze zákona zachování energie. Odvalením válce o úhel φ_0 do krajní polohy získá soustava potenciální energii

$$E_p = m_1 g(r - r_1)(1 - \cos\varphi_0) = 2m_1 g(r - r_1)\sin^2\frac{\varphi_0}{2} \doteq \frac{m_1 g(r - r_1)\varphi_0^2}{2}\,.$$

2 body

Při průchodu rovnovážnou polohou se okamžitý pohybový stav dá popsat jako rotace úhlovou rychlostí Ω_{m} okolo osy v místě dotyku válce a roviny. Kinetická energie soustavy je

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}J\Omega_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}\left[J_0 + mR^2 + \frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_1(R - r + r_1)^2\right]\Omega_{\mathrm{m}}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}m(3R^2 + r^2) + \frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_1(R - r + r_1)^2\right]\Omega_{\mathrm{m}}^2\,.$$

2 body

Z rovnosti potenciální energie v krajní poloze a kinetické energie v rovnovážné poloze odvodíme:

$$\frac{1}{2}m_1 g(r - r_1)\varphi_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}m(3R^2 + r^2) + \frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_1(R - r + r_1)^2\right]\Omega_{\mathrm{m}}^2\,,$$

$$m = \frac{\dfrac{2m_1 g(r - r_1)\varphi_0^2}{\Omega_{\mathrm{m}}^2} - m_1[r_1^2 + 2(R - r + r_1)^2]}{3R^2 + r^2}\,,$$

$$m = \frac{\dfrac{m_1 g(r - r_1)T^2}{2\pi^2} - m_1[r_1^2 + 2(R - r + r_1)^2]}{3R^2 + r^2}\,, \qquad J_0 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)\,.$$

2 body

Pro dané hodnoty: $m = 4{,}2\ \mathrm{kg}$, $J_0 = 0{,}24\ \mathrm{kg\cdot m^2}$. **1 bod**

2. a) Pro adiabatický děj 1 – 2 platí:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}\,, \qquad p_1V_1^{\varkappa} = p_2V_2^{\varkappa}\,, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \varepsilon^{\varkappa-1}\,,$$

$$\boxed{T_2 = T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\,, \qquad p_2 = p_1\varepsilon^{\varkappa}\,.}$$

Pro izobarický děj 2 – 3 platí:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \varphi\,,$$

$$\boxed{T_3 = T_2\varphi = T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi\,, \qquad p_3 = p_2 = p_1\varepsilon^{\varkappa}\,.}$$

Pro adiabatický děj 3 – 4 platí:

$$p_3V_3^{\varkappa} = p_4V_4^{\varkappa}\,, \qquad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1} = \varphi^{\varkappa-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}\,,$$

$$T_4 = T_3\varphi^{\varkappa-1}\varepsilon^{1-\varkappa}\,, \qquad \boxed{T_4 = T_1\varphi^{\varkappa}\,,}$$

$$p_4 = p_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa} = p_3\left(\frac{V_3}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa} = p_1\varepsilon^{\varkappa}\varphi^{\varkappa}\varepsilon^{-\varkappa}\,, \qquad \boxed{p_4 = p_1\varphi^{\varkappa}\,.}$$

Pro dané hodnoty:
$T_1 = 300$ K, $T_2 = 994$ K, $T_3 = 1790$ K, $T_4 = 683$ K,
($t_1 = 27$ °C, $t_2 = 721$ °C, $t_3 = 1517$ °C, $t_4 = 410$ °C),
$p_1 = 0{,}100$ MPa, $p_2 = 6{,}63$ MPa, $p_3 = 6{,}63$ MPa, $p_4 = 0{,}23$ MPa.

4 body

b) Hmotnost vzduchu, který projde pracovním prostorem válce během jednoho cyklu, můžeme vyjádřit pomocí stavové rovnice:

$$m = \frac{p_1V_1M_m}{R_mT_1}\,. \quad \text{Z toho plyne:} \quad mc_V = 2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}\,.$$

Během hoření paliva při ději 2 – 3 přijme pracovní látka teplo

$$Q_1 = mc_p(T_3 - T_2) = m\varkappa c_V(T_3 - T_2) = 2{,}5\varkappa\frac{p_1V_1}{T_1}(T_3 - T_2)\,.$$

Při izochorickém ději 4 – 1 odevzdá pracovní látka teplo

$$Q_2{}' = mc_V(T_4 - T_1) = 2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}(T_4 - T_1)\,.$$

Ostatní děje jsou adiabatické, tedy bez tepelné výměny. Motor pracuje s teoretickou účinností

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $Q_1 = 1860$ J, $Q_2' = 640$ J, $\eta = 66$ %. **3 body**

c) Do vztahu pro účinnost odvozeného v úloze b) dosadíme vztahy mezi teplotami odvozené v části a):

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa-1}}{\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi - \varepsilon^{\varkappa-1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa-1}}{\varphi - 1},$$

což jsme měli dokázat. **3 body**

3. a) Měřením v grafu můžeme určit dobu šesti period $6T = 22{,}86$ ms, počáteční napětí $U_0 = 4{,}56$ V, šesté lokální maximum $U_6 = 1{,}50$ V a první lokální minimum $U' = -4{,}33$ V. Platí:

$$\frac{U_6}{U_0} = \mathrm{e}^{-6\delta T}, \qquad \delta = \frac{\ln \frac{U_0}{U_6}}{6T} = 49{,}5\ \mathrm{s}^{-1},$$

$$T = 3{,}81\ \mathrm{ms}, \quad \omega = 1{,}65 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2 = \frac{1}{LC},$$

$$L = \frac{1}{(\omega^2 + \delta^2)C} = 0{,}367\ \mathrm{H} \doteq 0{,}37\ \mathrm{H}, \qquad R = 2L\delta = 36{,}3\ \Omega \doteq 36\ \Omega.$$

5 bodů

b) Největší proud obvodem procházel přibližně v okamžiku, kdy napětí poprvé kleslo na nulu. Proudem se vybíjel kondenzátor. Proto

$$i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Pro daný okamžik odečteme z grafu

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{-3{,}6\ \mathrm{V}}{0{,}005\ \mathrm{s}} = -7{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}^{-1}, \quad \text{takže} \quad I_{\max} = 7{,}2\ \mathrm{mA}.$$

Prakticky stejný výsledek dostaneme z energetické bilance. Počáteční energie obvodu $E_0 = \frac{1}{2}CU_0^2$ klesla při prvním překmitnutí na $E' = \frac{1}{2}CU'^2$. V okamžiku, kdy procházel obvodem největší proud, byla jeho energie soustředěna v magnetickém poli cívky a měla velikost

$$\frac{1}{2}LI_{\max}^2 \doteq \frac{E_0 + E'}{2}. \qquad \text{Z toho} \quad I_{\max} = \sqrt{\frac{C}{L} \cdot \frac{U_0^2 + U'^2}{2}} = 7{,}3\ \mathrm{mA}.$$

5 bodů

4. Za dobu $\mathrm{d}\tau$ vydá zdroj elektrickou energii $\mathrm{d}E_e$, která je rovna přírůstku $\mathrm{d}U$ vnitřní energie vinutí. Platí

$$\mathrm{d}E_e = \frac{U_e^2}{R}\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_e^2}{R_0(1+\alpha t)}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}U = mc\,\mathrm{d}t\,,$$

$$(1+\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{U_e^2}{R_0 mc}\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

2 body

Integrací v mezích od t_1 do t a od 0 s do τ a úpravami dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\int_{t_1}^{t}(1+\alpha t)\mathrm{d}t = \int_0^{\tau}\frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad \left[t+\frac{\alpha t^2}{2}\right]_{t_1}^{t} = \left[\frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\tau\right]_0^{\tau}\,,$$

$$t+\frac{\alpha t^2}{2}-t_1-\frac{\alpha t_1^2}{2} = \frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\tau\,,$$

$$t^2+\frac{2}{\alpha}t-\left(\frac{2U_e^2(1+\alpha t_1)}{\alpha R_1 mc}\tau+\frac{2t_1}{\alpha}+t_1^2\right) = 0\,.$$

2 body

Úloze vyhovuje kořen

$$t = -\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2t_1}{\alpha}+t_1^2+\frac{2U_e^2(1+\alpha t_1)}{\alpha R_1 mc}\tau}\,,$$

$$\boxed{t = -\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}+t_1\right)^2+\frac{2U_e^2(1+\alpha t_1)}{\alpha R_1 mc}\tau}\,.}$$

Grafem této závislosti je úsek paraboly. **2 body**

Pro dané hodnoty dostáváme závislost číselné hodnoty teploty na číselné hodnotě doby průchodu elektrického proudu ve tvaru

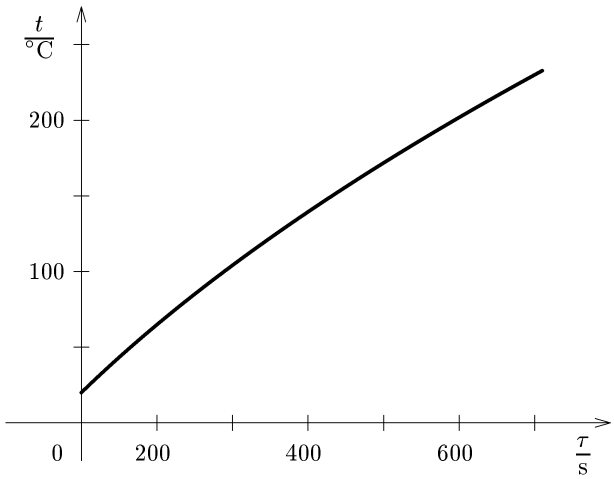
$$\boxed{\{t\} = -250+\sqrt{72900+262.5\{\tau\}}\,, \quad \tau \geq 0\ \mathrm{s}\,,}$$

tabulku

τ/s	0	100	200	300	400	500	600
t/°C	20	65	104	139	172	202	230

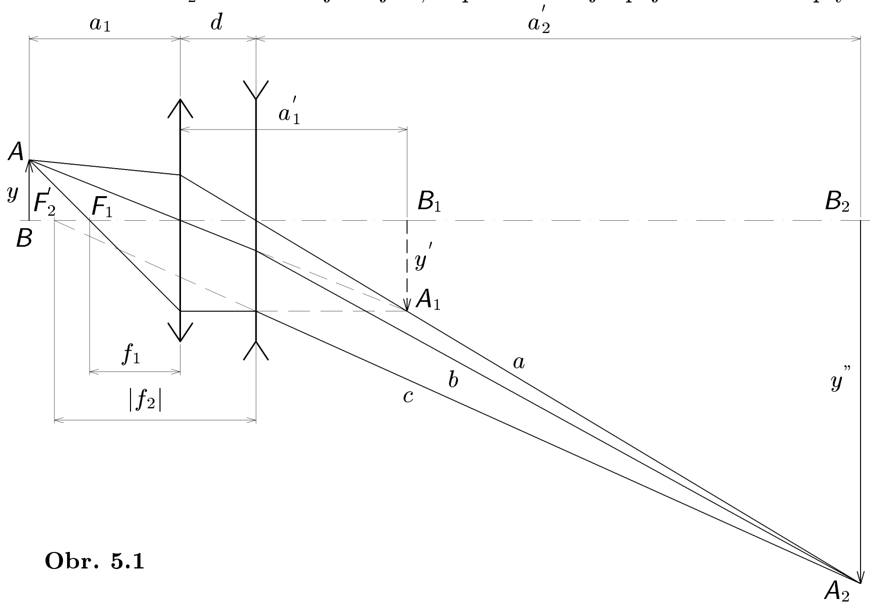
2 body

a graf



2 body

5. a) Grafické řešení úlohy pomocí význačných světelných paprsků je na obr. 5.1. Nejprve pomocí paprsků a a b nalezneme pomocný obraz A_1 a potom pomocí paprsku c ohniska F_1 a F_2'. Z obrázku je zřejmé, že první čočka je spojka a druhá rozptylka.



Obr. 5.1

5 bodů

b) V početním řešení použijeme označení veličin vyznačené v obr. 5.1. Z čočkové rovnice a vztahu pro výpočet zvětšení dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1'}=\frac{1}{f_1}\,,\qquad \frac{1}{d-a_1'}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{f_2}\,,\qquad \frac{y'}{y}=-\frac{a_1'}{a_1}\,,\qquad \frac{y''}{y'}=-\frac{a_2'}{d-a_1'}\,,$$

kterou vyřešíme postupně:

$$\frac{y''}{y}=\frac{a_1'a_2'}{a_1\left(d-a_1'\right)}\,,\qquad a_1'=\frac{y''a_1d}{a_2'y+y''a_1}=7{,}5\ \mathrm{cm}\,,$$

$$f_1=\frac{a_1a_1'}{a_1+a_1'}=3{,}0\ \mathrm{cm}\,,\qquad f_2=\frac{\left(d-a_1'\right)a_2'}{d-a_1'+a_2'}=-6{,}7\ \mathrm{cm}\,.$$

5 bodů

6. Absolutní teplotu vlákna žárovky T určíme ze vztahu

$$T=T_1+\frac{R-R_1}{\alpha R_1}\,,$$

kde T_1 je teplota okolí.

Ukázka hodnot naměřených a vypočtených při teplotě
$T_1 = 295{,}7$ K ($t_1 = 22{,}5$ °C):

U/V	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0
I/mA	2,65	5,2	9,2	12,0	15,5	21
R/Ω	18,9	19,2	21,7	25,0	32,2	47,6
P/mW	0,133	0,520	1,84	3,6	7,75	21
T/K	300,2	304,7	335,5	375,6	464,7	653,4
$P\cdot T^{-4}/10^{-14}$	1,63	6,0	14,5	18,1	16,6	11,5

U/V	5,0	10	15	20	25
I/mA	50	75	95	112,5	128
R/Ω	100	133	158	178	191
P/mW	250	750	1425	2250	3275
T/K	1296	1706	2008	2252	2468
$P\cdot T^{-4}/10^{-14}$	8,84	8,85	8,76	8,74	8,63

Z grafu závislosti odporu žárovky na napětí byla stanovena hodnota $R_1 = 18{,}5\ \Omega$. Poměr P/T^4 je při napětí větším než 5 V prakticky konstantní a má průměrnou hodnotu 8,76 $\mathrm{W\cdot K^{-4}}$. Tomu by u černého tělesa odpovídala část povrchu o plošném obsahu $S=\dfrac{P}{\sigma T^4}=1{,}55\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 \doteq 1{,}6\ \mathrm{mm}^2$.

7. a) Označme $\boldsymbol{v}_2'$ rychlost druhé částice po rázu. (Před rázem ovšem $v_2 = 0$.) Zákony zachování hybnosti a kinetické energie zapíšeme pomocí parametru $\mu = m_1/m_2$ ve tvaru:

$$v_2' = \mu(v_1 - v_1') , \qquad v_2'^2 = \mu(v_1^2 - v_1'^2) .$$

Tato soustava má řešení

$$v_1' = -\frac{1-\mu}{1+\mu} v , \qquad v_2' = \frac{2\mu}{1+\mu} v .$$

Pro $m_1 < m_2$ je $v_1' < 0$, tj. $\alpha_1 = 180°$, pro $m_1 > 0$ je $\alpha_1 = 0°$.
Číselně: $v_1' = -8{,}33 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\alpha_1 = 180°$, $v_2' = 6{,}67 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

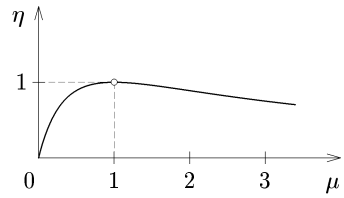
2 body

b) Relativní ztráta kinetické energie první částice při centrálním rázu je

$$\eta = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2} = 1 - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} .$$

Číselně: $\eta = 0{,}691 = 69{,}1\ \%$.

Relativní ztráta kinetické energie je největší pro $\mu = 1$, kdy dosahuje plných 100 %.



2 body

c) Označme α_2 úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{v}_2'$ rychlosti druhé částice po rázu s vektorem $\boldsymbol{v}_1$ rychlosti první částice před rázem. Zákony zachování hybnosti a ennergie dávají soustavu rovnic:

$$v_2' \cos\alpha_2 = \mu v_1 , \qquad v_2' \sin\alpha_2 = \mu v_1' , \qquad v_2'^2 = \mu(v_1^2 - v_1'^2) .$$

První dvě rovnice umocníme na druhou a odečteme je od třetí rovnice. Dostaneme kvadratickou rovnici pro rychlost v_1':

$$(1+\mu)v_1'^2 - (1-\mu)v_1^2 = 0$$

s řešením

$$v_1' = v_1 \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} .$$

Řešení má smysl pro $\mu < 1$. Pro $m_1 > m_2$ není možné úhlu $\alpha_1 = 90°$ dosáhnout. Pro $m_1 = m_2$ dostaneme $v_1' = 0$ a nemá tedy smysl mluvit o směru vektoru $\boldsymbol{v}_1'$.
Číselně: $v_1' = 1{,}12 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. **2 body**

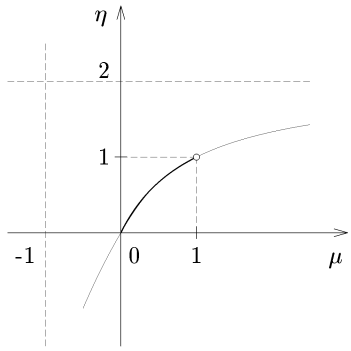
d) Při odklonu $\alpha_1 = 90°$ je relativní ztráta kinetické energie

$$\eta = \frac{2\mu}{1+\mu}\,.$$

Číselně: $\eta = 0{,}444 = 44{,}4\ \%$.
Závislost $\eta = \eta(\mu)$ přepíšeme do tvaru

$$\eta = 2 - \frac{2}{1+\mu}\,,$$

z něhož je zřejmé, že grafem je část hyperboly $(0 < \mu \leq 1)$.



2 body

e) V případech b) nabývá veličina η maximální hodnoty $\eta = 1$ pro $\mu = 1$, tedy pro stejné hmotnosti $m_1 = m_2$. Také v případě d) je η největší pro $\mu \to 1$ a blíží se k hodnotě 1. Naopak při srážce lehké částice s těžkou částicí $(m_1 \ll m_2)$ je $\mu \approx 0$, $\eta \approx 0$, tj. $E_1' \approx E_1$. Hmotnost atomu vodíku je přibližně rovna hmotnosti neutronu, neutrony tak srážkou s atomem vodíku ztrácejí nejvíce své kinetické energie.

2 body