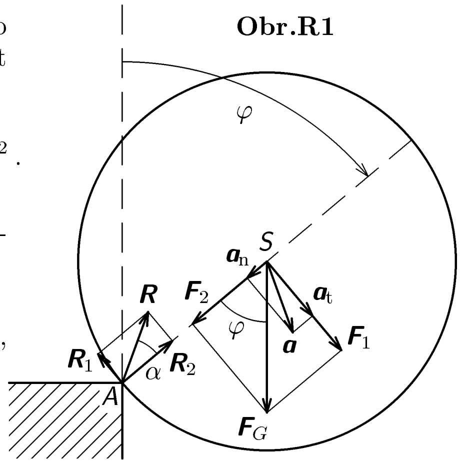
Řešení úloh 2. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: 1. B. Vybíral a P. Šedivý, 2. a 3. jsou z časopisu Kvant, 4. P. Šedivý

1.a) Vycházíme z obr. R1. Dokud nedojde ke sklouznutí, otáčí se koule okolo hrany A; vzhledem k ní má moment setrvačnosti

$$J = J_S + mr^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 \,.$$



Úhlovou rychlost ω koule určíme pomocí zákona zachování energie:

$$mgr(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{7}{10}mr^2\omega^2 \,,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10g(1-\cos\varphi)}{7r}} \,.$$

Úhlové zrychlení ε koule určíme pomocí druhé impulsové věty:

$$mgr\sin\varphi = J\varepsilon = \frac{7}{5}mr^2\varepsilon \,, \qquad \varepsilon = \frac{5g\sin\varphi}{7r} \,.$$

3 body

b) Na kouli během otáčení působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce desky $\boldsymbol{R}$. Tíhovou sílu můžeme rozložit na složku $\boldsymbol{F}_1$ kolmou ke spojnici AS a na složku $\boldsymbol{F}_2$, která směřuje do bodu A. Podobně rozložíme reakci desky na složky $\boldsymbol{R}_1$ a $\boldsymbol{R}_2$. Podle první impulsové věty platí

$$\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}_S \,,$$

$$F_1 - R_1 = ma_t = mr\varepsilon \,, \qquad F_2 - R_2 = ma_n = m\omega^2 r \,.$$

S využitím vztahů odvozených v části a) můžeme psát:

$$m\varepsilon r = \frac{5mg\sin\varphi}{7} = mg\sin\varphi - R_1 \,,$$

$$m\omega^2 r = \frac{10mg(1-\cos\varphi)}{7} = mg\cos\varphi - R_2 \,,$$

$$R_1 = mg\sin\varphi\left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{2}{7}mg\sin\varphi \,,$$

$$R_2 = \frac{mg}{7}\,(7\cos\varphi + 10\cos\varphi - 10) = \frac{mg}{7}(17\cos\varphi - 10)\,.$$

S rostoucím úhlem φ se složka $\boldsymbol{R}_1$ zvětšuje a složka $\boldsymbol{R}_2$ zmenšuje.
(Pro $\cos\varphi = \frac{10}{17}$, tj. $\varphi \doteq 54°$ by platilo $R_2 = 0$.)
Velikost R reakce desky a její odchylku α od spojnice AS určují vztahy:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \frac{mg}{7}\sqrt{104 + 285\cos^2\varphi - 340\cos\varphi}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi - 10}\,.$$

4 body

c) Ke sklouznutí dojde od okamžiku, kdy $R_1 = fR_2$. Z této podmínky určíme úhel φ:

$$\frac{2}{7}mg\sin\varphi = f\frac{mg}{7}(17\cos\varphi - 10)\,, \quad \text{neboli} \quad 2\sin\varphi = f(17\cos\varphi - 10)\,,$$

$$4\sin^2\varphi = 4 - 4\cos^2\varphi = f^2(17\cos\varphi - 10)^2 = f^2(289\cos^2\varphi - 340\cos\varphi + 100)\,,$$

$$\underbrace{(289f^2 + 4)}_{a}\cos^2\varphi \underbrace{-340f^2}_{b}\cos\varphi + \underbrace{100f^2 - 4}_{c} = 0\,.$$

Po dosazení $f = 0{,}25$ dostaneme hodnoty koeficientů kvadratické rovnice $a = 22{,}0625$, $b = -21{,}25$, $c = 2{,}25$ a kořeny

$$\cos\varphi_1 = 0{,}8421\,, \quad \cos\varphi_2 = 0{,}1211\,, \qquad \varphi_1 \doteq 33°\,, \quad \varphi_1 \doteq 83°\,.$$

Úloze vyhovuje úhel $\varphi_1 \doteq 33°$. **3 body**

2. a) Výchozí předpoklady můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P_\mathrm{e} = UI = AT^4\,, \qquad R = \frac{U}{I} = BT\,,$$

kde A, B jsou konstanty dané žárovky. Spojením obou vztahů dostaneme:

$$UI = AT^4 = A\left(\frac{U}{BI}\right)^4\,, \qquad I^5 = \frac{A}{B^4}U^3\,,$$

$$I = \sqrt[5]{\frac{A}{B^4}} \cdot U^{\frac{3}{5}} = CU^{\frac{3}{5}}\,,$$

kde C je opět konstanta dané žárovky. **3 body**

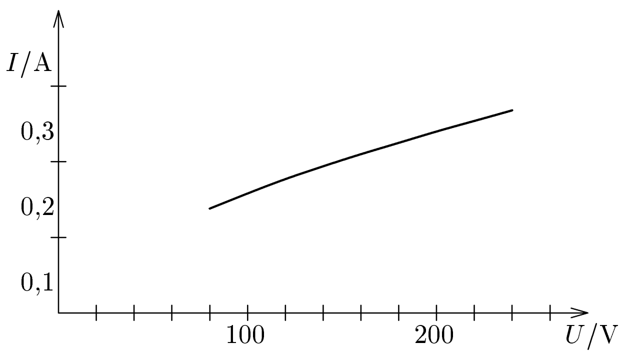
b) Danou žárovku prochází při jmenovitém napětí 220 V proud $I = \frac{60\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} =$ 0,261 A. Z toho určíme číselnou hodnotu konstanty C:

$$C = \frac{I}{U^{\frac{3}{5}}}\,, \qquad \{C\} = \frac{0{,}261}{230^{\frac{3}{5}}} = 0{,}00999$$

2 body

a připravíme tabulku pro sestrojení grafu:

U/V	80	100	120	140	160	180	200	220	240
I/A	0,138	0,158	0,177	0,194	0,210	0,225	0,240	0,254	0,268



Obr. R2

Pro malá napětí nejsou dostatečně přesně splněny předpoklady řešení, proto charakteristika začíná až u napětí 80 V. **2 body**

c) Zářivé výkony při napětích $U_1 = 210$ V a $U = 230$ V jsou v poměru

$$\frac{P_{\mathrm{e}1}}{P_{\mathrm{e}}} = \frac{U_1 I_1}{U I} = \frac{U_1}{U} \cdot \left(\frac{U_1}{U}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{U_1}{U}\right)^{\frac{8}{5}} = 0{,}859 \doteq 86\ \%\,.$$

Protože při poklesu napětí se sníží i povrchová teplota vlákna, spektrum žárovky se posune do infračervené oblasti a světelný tok poklesne na ještě méně než 86 %.

3 body

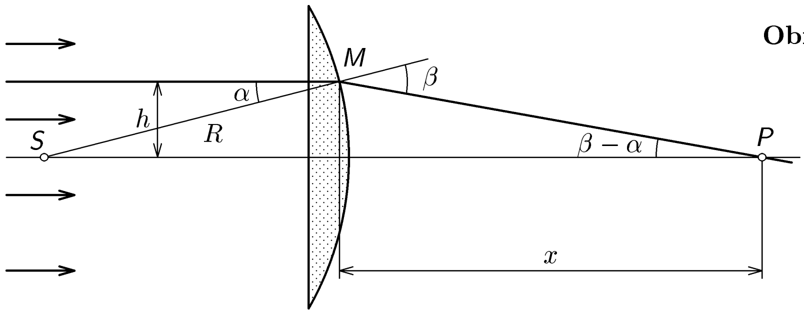
3. a) Vyjděme z obr. R3. Paprsek přicházející na čočku ve vzdálenosti h od optické osy dopadá na kulovou plochu do bodu M pod úhlem α, láme se pod úhlem β, po průchodu čočkou svírá s optickou osou úhel $\beta-\alpha$ a protíná ji v bodě P. Platí

$$\sin\alpha = \frac{h}{R}\,, \qquad \sin\beta = n\sin\alpha = \frac{nh}{R}\,, \qquad x = \frac{h}{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}\,.$$

Pro $h \to 0$ můžeme psát

$$\alpha \doteq \frac{h}{R}\,, \qquad \beta \doteq \frac{nh}{R}\,, \qquad x \to x_0 = \frac{h}{\beta-\alpha} = \frac{R}{n-1}\,.$$

Bod M přejde do vrcholu kulového vrchlíku V, bod P přejde do ohniska čočky F, které leží ve vzdálenosti x_0 od vrchlíku. Do této vzdálenosti také umístíme stínítko (obr R4).
Pro dané hodnoty dostáváme $x_0 = 166{,}7$ mm.



Obr. R3

5 bodů

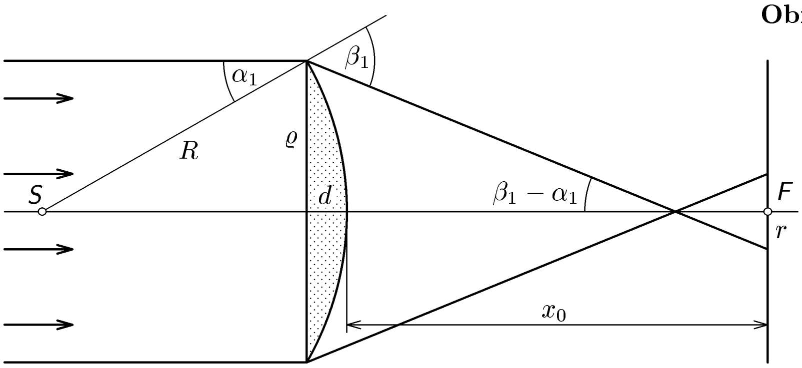
b) Odstraníme-li clonu, dopadnou na stínítko nejdále od bodu F paprsky procházející čočkou u samé hrany (obr. R4). Vzdálenost ϱ hrany od optické osy určíme podle Eukleidovy věty pro výšku:

$$\varrho = \sqrt{(2R-d)d} = 31{,}23 \text{ mm}\,.$$

Tyto paprsky dopadají na kulovou plochu čočky pod úhlem $\alpha_1 = \arcsin\frac{\varrho}{R} = 18{,}195°$ a lámou se pod úhlem $\beta_1 = \arcsin\frac{n\varrho}{R} = 29{,}974°$. Stínítko protínají ve vzdálenosti r od optické osy:

$$r = (x_0 + d)\operatorname{tg}(\beta_1 - \alpha_1) - \varrho = 4{,}6 \text{ mm}\,.$$

Obr. R4



5 bodů

4.a) Dioda propouští nabíjecí proud, když $u = U_\mathrm{m} \sin \omega t > U_\mathrm{b}$. Na počátku a na konci tohoto časového intervalu platí

$$\sin \omega t = \frac{U_\mathrm{b}}{U_\mathrm{m}} = \frac{U_\mathrm{b}}{U\sqrt{2}} = 0{,}50283\,.$$

Řešením rovnice dostaneme:

$$\omega t_1 = 0{,}52687 \text{ rad}\,, \quad \omega t_2 = 2{,}61472 \text{ rad}\,, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1}\,,$$

$$t_1 = 0{,}00168 \text{ s}\,, \quad t_2 = 0{,}00832 \text{ s}\,.$$

Během jedné periody střídavého napětí prochází nabíjecí proud po dobu $t_2 - t_1 = 0{,}00664$ s, což je 33,2 % periody.

3 body

b) Během jedné periody střídavého napětí přijme akumulátor náboj

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U_\mathrm{m} \sin \omega t - U_\mathrm{b}}{R}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{U_\mathrm{m}}{\omega R}\cos \omega t - \frac{U_\mathrm{b}}{R}t\right]_{t_1}^{t_2}\,,$$

$$Q = \frac{U_\mathrm{m}}{\omega R}(cos\omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_\mathrm{b}}{R}(t_2 - t_1)\,.$$

Střední hodnota nabíjecího proudu je $I_\mathrm{s} = Q/T$. Z uvedených vztahů úpravou dostaneme

$$R = \frac{U_\mathrm{m}}{\omega T I_\mathrm{s}}(\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_\mathrm{b}}{T I_\mathrm{s}}(t_2 - t_1) =$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{2\pi I_\mathrm{s}}(\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_\mathrm{b}}{T I_\mathrm{s}}(t_2 - t_1) = 1{,}38\ \Omega\,.$$

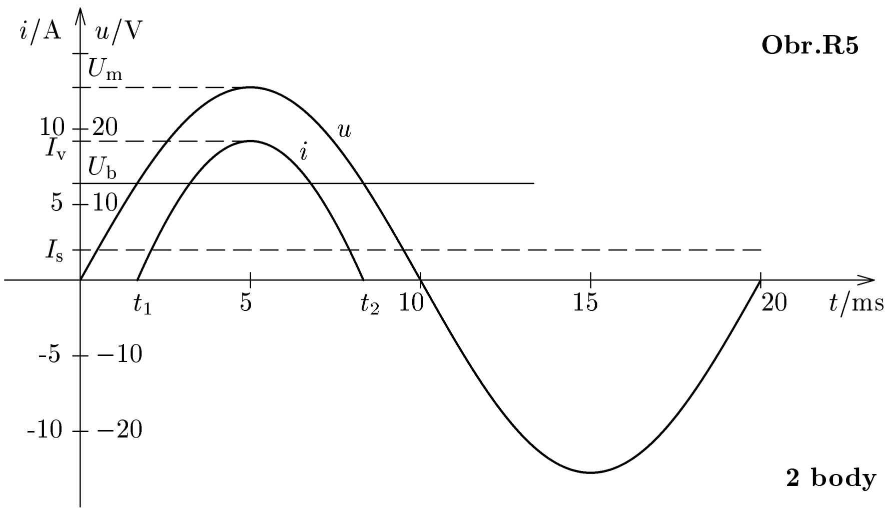
4 body

c) Nabíjecí proud má špičkovou hodnotu

$$I_\mathrm{v} = \frac{U\sqrt{2} - U_\mathrm{b}}{R} = 9{,}2 \text{ A}\,.$$

1 bod

d)



i/A
u/V
Obr.R5
U_m
10
20
u
I_v
i
U_b
5
10
I_s
t_1
5
t_2
10
15
20
t/ms
-5
−10
-10
−20
2 body