Řešení úloh 2. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: V. Vícha (1, 4), A. Zilberman (2, 3).

1. a) Práce potřebná k převrácení krychle je rovna změně potenciální energie při přechodu do labilní polohy:

$$W = mg\Delta H = mg\left(\frac{u}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{mga(\sqrt{2}-1)}{2} \doteq 5\,900\ \mathrm{J}\,.$$

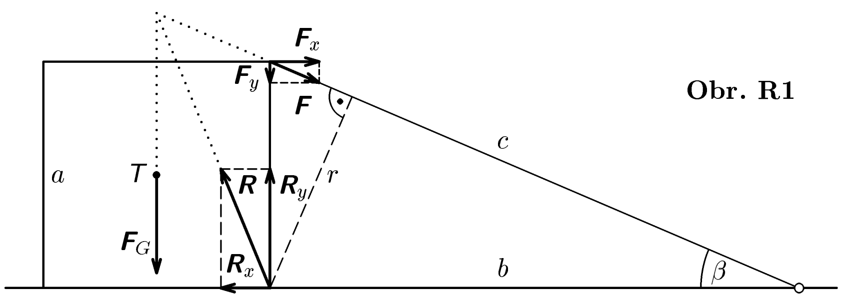
2 body

b) Protože navíjení probíhá pomalu, můžeme zanedbat dynamický účinek síly lanka. Hledáme podmínky rovnováhy všech sil, které působí na krychli. Kromě tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a síly lanka $\boldsymbol{F}$ je to ještě reakce podlahy $\boldsymbol{R}$, která působí v hraně, okolo které se krychle převrací (obr. R1). Vzhledem k této hraně se momenty sil $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{F}$ vzájemně ruší. Rameno r síly lanka určíme jako výšku pravoúhlého trojúhelníku:

$$P_\triangle = \frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot r}{2}\,, \qquad F_G\cdot\frac{a}{2} = F\cdot r\,, \qquad mg\frac{a}{2} = F\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

$$F = \frac{mg\sqrt{a^2+b^2}}{2b} \doteq 1{,}50\cdot 10^4\ \mathrm{N}\,.$$

2 body



Obr. R1

c) Z podmínek rovnováhy plyne:

$$R_x = F_x = F\cos\beta = F\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{mg}{2}\,,$$

$$R_y = F_G + F_y = F_G + F\sin\beta = F_G + F\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = mg\left(1+\frac{a}{2b}\right)\,.$$

Aby krychle nesklouzla po podlaze, musí platit:

$$F_x = R_x \leq f R_y = f(F_G + F_y)\,, \quad f \geq \frac{F_x}{F_G + F_y} = \frac{1}{2 + \dfrac{a}{b}} = \frac{b}{a + 2b} = 0{,}43\,.$$

2 body

d) Podobně jako v části b) vyjdeme z momentové věty: $F_G \cdot r_1 = F \cdot r_2$. Rameno r_2 síly $\boldsymbol{F}$ určíme jako výšku trojúhelníku určeného stranami a, b a jimi sevřeným úhlem $\gamma = 90° - \varphi$ (obr. R2). Platí:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\varphi}\,,$$

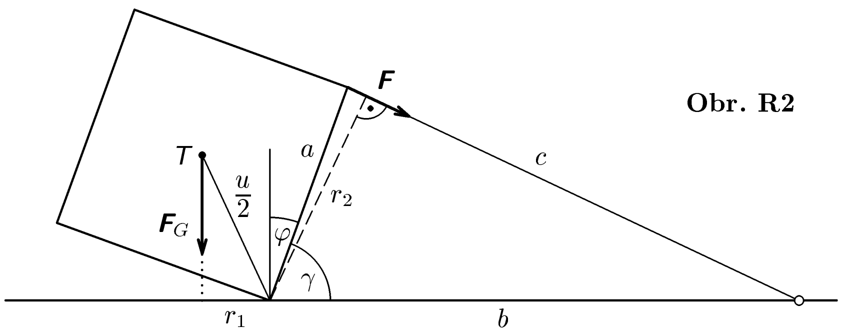
$$P_\triangle = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ab\cos\varphi}{2} = \frac{r_2 c}{2} = \frac{r_2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\varphi}}{2}\,,$$

$$r_2 = \frac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\varphi}}\,, \qquad r_1 = \frac{u}{2}\sin(45° - \varphi) = \frac{a\sqrt{2}}{4}\sin(45° - \varphi)$$

$$F = \frac{F_G \cdot r_1}{r_2} = \frac{mg\sqrt{2}\sin(45° - \varphi)\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\varphi}}{4b\cos\varphi}\,, \qquad 0 \leq \varphi \leq 45°\,.$$

3 body

Pro dané hodnoty dostaneme $F \doteq 940$ N. **1 bod**



Obr. R2

2. Proud I_1 vyjádříme podle Ohmova zákona jako podíl elektromotorického napětí zdroje a celkového odporu R_c:

$$I_1 = \frac{U_e}{R_c} = \frac{U_e}{R_A + \dfrac{R_V \cdot R}{R_V + R}} .$$

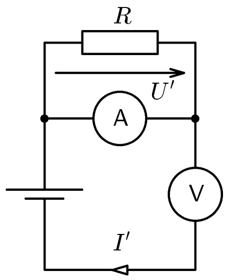
Napětí U_1 na paralelní kombinaci voltmetru s rezistorem je pak

$$U_1 = \frac{R_V \cdot R}{R_V + R} \cdot I_1 = \frac{R_V \cdot R}{R_V R_A + R_A R + R_V R} \cdot U_e . \qquad (1)$$

2 body

Přemístěním rezistoru upravíme obvod podle obr. R3. Ze zdroje odebíráme proud

$$I' = \frac{U_e}{R_V + \dfrac{R_A \cdot R}{R_A + R}} .$$



Obr. R3

Na paralelní kombinaci ampérmetru s rezistorem vznikne napětí

$$U' = \frac{R_A \cdot R}{R_A + R} \cdot I' = \frac{R_A \cdot R}{R_V R_A + R_A R + R_V R} \cdot U_e ,$$

ampérmetrem tedy prochází proud

$$I_2 = \frac{U'}{R_A} = \frac{R}{R_V R_A + R_A R + R_V R} \cdot U_e , \qquad (2)$$

4 body

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostaneme:

$$I_2 = \frac{U_1}{R_V} , \qquad R_V = \frac{U_1}{I_2} = 800\ \Omega .$$

2 body

Zbývá určit odpor rezistoru. Z (1) plyne:

$$R = \frac{U_1 R_V}{R_V I_1 - U_1} = \frac{\dfrac{U_1^2}{I_2}}{\dfrac{U_1}{I_2} I_1 - U_1} = \frac{U_1}{I_1 - I_2} \doteq 270\ \Omega .$$

2 body

Odpor ampérmetru a elektromotorické napětí zdroje z daných hodnot určit nelze.

3. a) Z fázorových diagramů na obr. R4 plyne:

$$I_1^2 = (2I_R)^2 + I_C^2\,, \qquad I_2^2 = I_R^2 + I_C^2\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$I_R^2 = \frac{I_1^2 - I_2^2}{3}\,, \qquad I_C^2 = \frac{4I_2^2 - I_1^2}{3}\,, \qquad I_R = 0{,}129\ \mathrm{A} \qquad I_C = 0{,}153\ \mathrm{A}\,.$$

4 body

b) Odpory rezistorů a kapacita kondenzátorů jsou:

$$R = \frac{U}{I_R} \doteq 280\ \Omega\,, \qquad C = \frac{I_C}{2\pi f U} \doteq 14\ \mu\mathrm{F}\,.$$

3 body

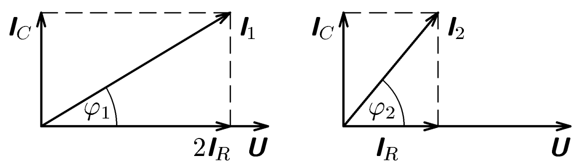
c) Z fázorových diagramů dále plyne:

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{I_C}{2I_R} \doteq 31^\circ\,, \qquad \varphi_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{I_C}{I_R} \doteq 50^\circ\,.$$

Proudy $I_1,\ I_2$ předbíhají fázově před napětím zdroje o 31° a 50°.

3 body

Obr. R4



4.a) Vyjdeme ze vztahu pro výpočet doby kyvu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{J}{D}} = \pi\sqrt{\frac{J}{mdg}}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, D direkční moment, d vzdálenost těžiště od osy otáčení, m hmotnost kyvadla a g tíhové zrychlení. Za daných zjednodušujících předpokladů je ve výšce h tíhové zrychlení

$$g \doteq a_{\mathrm{g}} = \frac{\varkappa M_{\mathrm{z}}}{(R_{\mathrm{z}}+h)^2} = \frac{\varkappa M_{\mathrm{z}}}{R_{\mathrm{z}}^2}\cdot\frac{R_{\mathrm{z}}^2}{(R_{\mathrm{z}}+h)^2} = g_0\frac{R_{\mathrm{z}}^2}{(R_{\mathrm{z}}+h)^2}\,,$$

kde g_0 je tíhové zrychlení v nulové nadmořské výšce. Doba kyvu ve výšce h je

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{J}{mdg_0}}\cdot\frac{R_{\mathrm{z}}+h}{R_{\mathrm{z}}} = \tau_0\cdot\frac{R_{\mathrm{z}}+h}{R_{\mathrm{z}}}\,,$$

kde $\tau_0 = 1\ \mathrm{s}$ je doba kyvu v nulové nadmořské výšce. Počet kmitů za jeden den ve výšce h je

$$N = \frac{86\,400\ \mathrm{s}}{\tau} = \frac{86\,400\ \mathrm{s}}{\tau_0}\cdot\frac{R_{\mathrm{z}}}{R_{\mathrm{z}}+h} = 86\,400\left(1-\frac{h}{R_{\mathrm{z}}+h}\right) = 86\,400 - 5{,}4\,.$$

Po zvednutí do výše 400 m se hodiny za den zpozdí o 5,4 s.

5 bodů

b) Vzroste-li teplota kyvadla, vzroste i vzdálenost těžiště od osy otáčení podle vztahu $d = d_1(1+\alpha\Delta t)$, kde d_1 je vzdálenost při výchozí teplotě t_1 . Podle obdobného vztahu se zvětší také vzdálenosti jednotlivých částic kyvadla od osy otáčení. Proto

$$D = mgd = mgd_1(1+\alpha\Delta t) = D_1(1+\alpha\Delta t)\,,$$

$$J = \sum m_i r_i^2 = J_1(1+\alpha\Delta t)^2\,,$$

kde J_1 a D_1 jsou moment setrvačnosti a direkční moment při výchozí teplotě t_1. Změní se i doba kyvu podle vztahu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{J}{D}} = \pi\sqrt{\frac{J_1}{D_1}}\cdot\sqrt{1+\alpha\Delta t} = \tau_1\sqrt{1+\alpha\Delta t}\,,$$

kde $\tau_1 = 1\ \mathrm{s}$ je doba kyvu při výchozí teplotě t_1. Počet kyvů za den bude

$$N = \frac{86\,400\ \mathrm{s}}{\tau} = \frac{86\,400\ \mathrm{s}}{\tau_1\sqrt{1+\alpha\Delta t}} = \frac{86\,400}{\sqrt{1+\alpha\Delta t}} \doteq$$

$$\doteq 86\,400\left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{2}\right) = 86\,400 - 5{,}2\,.$$

Po zahřátí o 10 K se hodiny za den zpozdí o 5,2 s.

5 bodů