

Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: V. Vícha (1, 3), M. Randa (4) a P. Šedivý (2)

1.a) Řešením soustavy rovnic

$$V_{\max} - V_{\min} = V_{\text{zdv}}, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon$$

dostaneme:

$$V_{\min} = V_B = V_C = \frac{V_{\text{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 37 \text{ cm}^3 = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3,$$

$$V_{\max} = V_A = V_D = \frac{\varepsilon V_{\text{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 359 \text{ cm}^3 = 3,59 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1 bod

b) Vyjdeme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = nR_m, \quad n = \frac{p_A V_A}{R_m T_A} = 0,0144 \text{ mol}.$$

1 bod

c) Ze stavové rovnice a Poissonova zákona odvodíme:

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\kappa = p_A \cdot \varepsilon^\kappa = 2,41 \text{ MPa},$$

$$T_B = \frac{p_B V_B T_A}{p_A V_A} = T_A \cdot \varepsilon^{\kappa-1} = 744 \text{ K} \quad T_C = 3T_B = 2230 \text{ K}.$$

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{p_C}{p_D} \Rightarrow \frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C}{p_B} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}, \quad p_C = p_B \frac{T_C}{T_B} = 7,22 \text{ MPa},$$

$$p_D = p_A \frac{T_C}{T_B} = 300 \text{ kPa}, \quad T_D = T_A \frac{T_C}{T_B} = 900 \text{ K}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

p - V diagram je na obr. R1.

d) Děje AB a CD jsou adiabatické:

$$Q_{AB} = 0, \quad W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{5}{2} n R_m (T_B - T_A) = 133 \text{ J},$$

$$Q_{CD} = 0, \quad W'_{CD} = -\Delta U_{CD} = \frac{5}{2} n R_m (T_C - T_D) = 399 \text{ J}.$$

Děje BC a DA jsou izochorické:

$$W_{BC} = 0 \quad \Delta U_{BC} = Q_{BC} = \frac{5}{2}nR_m(T_C - T_B) = 445 \text{ J},$$

$$W_{DA} = 0 \quad \Delta Q'_{DA} = -\Delta U_{DA} = \frac{5}{2}nR_m(T_D - T_A) = 180 \text{ J}.$$

2 body

e) Během jednoho cyklu se vykoná celková práce

$$W = W'_{CD} - W_{AB} = Q_{BC} - Q'_{DA} = 266 \text{ J}.$$

Účinnost cyklu je

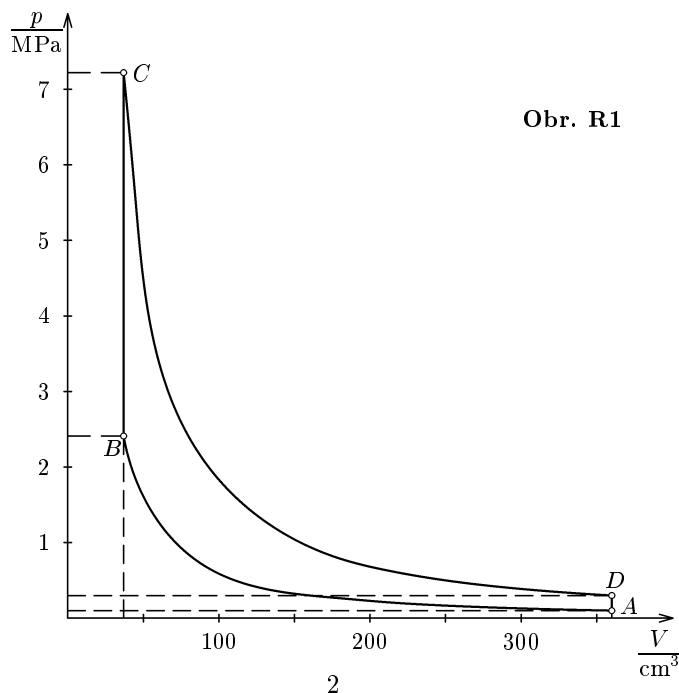
$$\eta = \frac{W}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - Q'_{DA}}{Q_{BC}} = 60 \text{ \%}.$$

1 bod

f) Kruhový děj ve válci proběhne během dvou otáček klikového hřídele. Protože motor je čtyřválcový, platí:

$$P = 4 \cdot 0,5f \cdot W = 2 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 266 \text{ J} = 26,6 \text{ kW}.$$

1 bod



- 2.a) Obvod na obr. 1 je zapojen jako invertující zesilovač. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro uzel u invertujícího vstupu OZ (vstupní proud OZ zanedbáváme):

$$\frac{U_r}{R_1} = -\frac{u_o}{R_x}, \quad u_o = -\frac{R_x}{R_1}U_r.$$

Úpravou dostaneme:

$$R_x = -\frac{R_1 u_o}{U_r} = K u_o, \quad K = -\frac{R_1}{U_r} = -1 \text{ k}\Omega \cdot \text{V}^{-1}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Číselná hodnota měřeného odporu v kiloohmech je tedy rovna číselné hodnotě výstupního napětí operačního zesilovače ve voltech. Aby voltmetr ukazoval kladnou hodnotu, musíme jeho kladnou svorku uzemnit a zápornou připojit na výstup operačního zesilovače. Měřicí rozsah v kiloohmech je číselně roven měřicímu rozsahu voltmetru ve voltech. Můžeme tedy měřit odpory do 10 kiloohmů. $\mathbf{1 \text{ bod}}$

- b) Abychom zvětšili měřicí rozsah na $1 \text{ M}\Omega$, tedy stokrát, musíme zvětšit stokrát konstantu úměrnosti K . Toho dosáhneme zvětšením odporu R_1 na $1 \text{ M}\Omega$. $\mathbf{1 \text{ bod}}$
- c) Obvod na obr. 2 pracuje podobně jako diferenciální zesilovač. Vstupní diferenciální napětí OZ je prakticky nulové a na obou vstupech OZ je proti zemi stejné napětí u^* . Vstupní proudy OZ jsou zanedbatelné. Vyjdeme z obr. R2. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro uzel u neinvertujícího vstupu OZ:

$$i_1 = i_2, \quad \frac{u_o - u^*}{R_2} = \frac{u^*}{R_1}, \quad u^* = \frac{u_o R_1}{R_1 + R_2}.$$

Pro uzel u invertujícího vstupu platí:

$$i_3 + i_4 = i_5, \quad \frac{U_r - u^*}{R_1} + \frac{u_o - u^*}{R_2} = \frac{u^*}{R_x}, \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

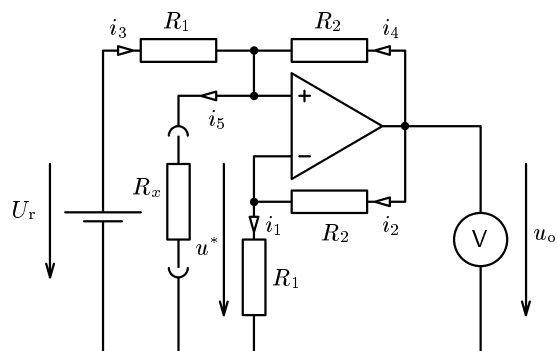
$$\frac{U_r}{R_1} + \frac{u_o}{R_2} - \frac{u^*(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{u^*}{R_x}, \quad \frac{U_r}{R_1} + \frac{u_o}{R_2} - \frac{u_o}{R_2} = \frac{u_o R_1}{(R_1 + R_2) R_x},$$

$$R_x = \frac{u_o R_1^2}{U_r (R_1 + R_2)} = K_1 u_o, \quad K_1 = \frac{R_1^2}{U_r (R_1 + R_2)} = 10 \Omega \cdot \text{V}^{-1}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Protože měřicí rozsah voltmetru je 10 V , je měřicí rozsah obvodu

$$10 \text{ V} \cdot 10 \Omega \cdot \text{V}^{-1} = 100 \Omega. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Obr. R2

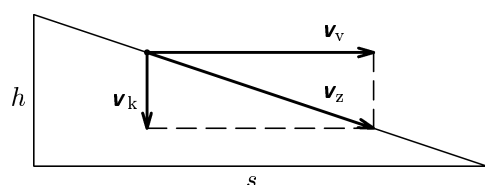


- 3.a) Během rozjíždění urazí vozík dráhu s a osy kol otočí o úhel

$$\varphi = \frac{h}{r_2} = \frac{s}{r_1}. \quad \text{Z toho} \quad s = h \frac{r_1}{r_2}.$$

Pohyb bodu Z vznikne složením rovnoměrně zrychleného pohybu vozíku a rovnoměrně zrychleného klesání závaží kolmo k vozíku. Probíhá po přeponě pravoúhlého trojúhelníku se svislou odvěsnou délky h a vodorovnou odvěsnou délky s (obr. R3). Rychlost \mathbf{v}_z bodu Z je vektorovým součtem rychlosti vozíku \mathbf{v}_v a rychlosti klesání \mathbf{v}_k . Z podobnosti trojúhelníků dostaneme:

Obr. R3



$$\frac{v_k}{v_v} = \frac{h}{s} = \frac{r_2}{r_1},$$

$$v_z = \sqrt{v_v^2 + v_k^2} = v_v \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}.$$

2 body

- b) Vyjdeme ze zákona zachování energie. Těsně před dosednutím závaží na vozík má rychlost vozíku velikost v , rychlost závaží má velikost $v\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$ a kola se otáčejí úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v}{r_1}$. Platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + \frac{1}{2}(4m_1 + 2m_2 + m_3)v^2 + \frac{1}{2}(4J_1 + 2J_2)\omega^2 =$$

$$= \frac{v^2}{2} \left[m \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + 6m_1 + m_2 \left(2 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + m_3 \right],$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{\left[m \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + 6m_1 + m_2 \left(2 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + m_3 \right]},$$

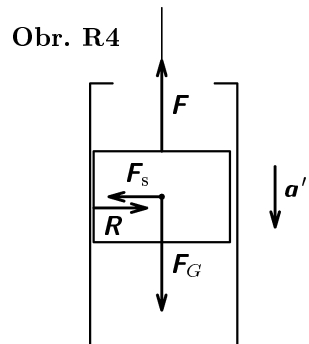
$$s = h \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2hr_1}{ar_2}}, \quad v = at,$$

$$a = \frac{v^2 r_2}{2r_1 h} = \frac{m g r_2}{r_1 \left[m \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + 6m_1 + m_2 \left(2 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + m_3 \right]}.$$

Numericky: $a = 0,785 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t = 1,38 \text{ s}$ $v = 1,085 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5 bodů

- c) Z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem působí na závaží 4 síly (obr. R4): tíhová síla F_G , síla vlákna F , setrvačná síla F_s a reakce trubky R . Pokud je tření závaží o stěnu trubky zanedbatelné, setrvačná síla a reakce trubky se vzájemně ruší a zbývající dvě síly udělují závaží ve svislém směru zrychlení a' . Platí



$$\frac{a'}{a} = \frac{v_k}{v_v} = \frac{r_2}{r_1},$$

$$F_G - F = ma',$$

$$F = mg - ma' = m \left(g - a \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Numericky: $F = 1,451 \text{ N}$.

3 body

- 4.a) Dolní destička má proti zápornému pólu zdroje napětí $0,5U_0$, horní destička má napětí $U_0 \frac{h}{L}$. Vychylovací napětí je jejich rozdíl

$$U_v = U_0 \left(\frac{h}{L} - 0,5 \right) = U_0 \frac{h - 0,5L}{L}.$$

2 body

Vychylovací napětí tedy můžeme měnit od $U_{v_{\min}} = -0,5U_0$ pro $h = 0$ do $U_{v_{\max}} = 0,5U_0$ pro $h = L$.

- b) Zvolme vztaznou soustavu s počátkem O v místě vstupu elektronu mezi destičky tak, že osa x splývá s osou trysky a osa y je kolmá k destičkám (obr. R5 – není v měřítku). Elektron získal v trysce rychlost v_0 se kterou vletá mezi destičky. Platí:

$$Ue = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2Ue}{m}},$$

1 bod

kde e je elementární náboj a m je hmotnost elektronu. Mezi destičkami působí na elektron ve směru osy y stálá elektrická síla o velikosti

$$F = Ee = \frac{U_v e}{d}, \quad \text{kteřá mu uděluje zrychlení o velikosti} \quad a = \frac{F}{m} = \frac{U_v e}{md}.$$

1 bod

Je-li vychylovací napětí U_v kladné, směřuje elektrická síla vzhůru, je-li vychylovací napětí U_v záporné, směřuje elektrická síla dolů.

Pohyb elektronu mezi destičkami je složen z rovnoměrného pohybu ve směru osy x a z rovnoměrně zrychleného pohybu ve směru osy y . Platí:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{ax^2}{2v_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_v e}{md} \cdot \frac{x^2 m}{2Ue} = \frac{U_v x^2}{4dU}.$$

Elektronový paprsek se právě dotkne destičky, jestliže

$$\frac{d}{2} = \frac{|U_v| \cdot l^2}{4dU}. \quad \text{Z toho} \quad U_{v_{\max}} = |U_{v_{\min}}| = \frac{U_0}{2} = \frac{2d^2}{l^2} U, \quad U_0 = \frac{4d^2}{l^2} U.$$

Pro dané hodnoty: $U_0 = 500 \text{ V}$

3 body

- c) Rychlost elektronu při výstupu z prostoru destiček je odchýlena od osy trysky o úhel α , pro který platí:

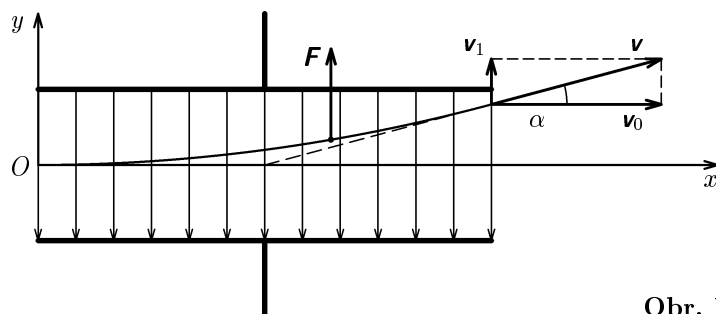
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_0} = \frac{at}{v_0} = \frac{U_v e}{md} \cdot \frac{l}{v_0^2} = \frac{U_v l}{2Ud}.$$

V krajním případě

$$U_{v_{\max}} = \frac{2d^2}{l^2} U, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{d}{l}.$$

Pro dané hodnoty: $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = 0,25$, $\alpha_{\max} = 14^\circ$.

3 body



Obr. R5