Řešení úloh regionálního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: L. Zdeborová (1), P. Šedivý (2, 3), I. Čáp (4)

1.a) Během valení se mění potenciální energie trubky i tyčky. Vyjádříme-li úhel β v radiánech, platí:

$$\Delta E_{\mathrm{p1}} = -Mg\beta R \sin\alpha\,, \quad \Delta E_{\mathrm{p2}} = -mg\beta R \sin\alpha + mgR[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)]\,.$$

Protože celková potenciální energie soustavy trubka – tyčka je ve výchozí poloze nulová, platí po přemístění:

$$E_{\mathrm{p}} = \Delta E_{\mathrm{p1}} + \Delta E_{\mathrm{p2}} = -MgR\beta\sin\alpha + mgR[\cos\alpha - \beta\sin\alpha - \cos(\alpha+\beta)]\,.$$

3 body

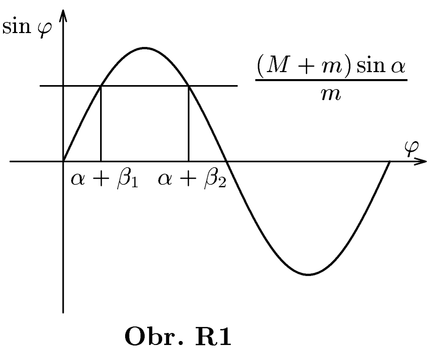
b) V rovnovážné poloze nabývá potenciální energie lokálního extrému:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\beta} = -MgR\sin\alpha + mgR[-\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta)] = 0\,,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{(M+m)\sin\alpha}{m}\,. \qquad (1)$$

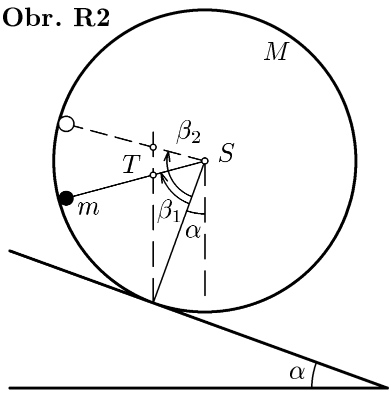
Aby existovaly rovnovážné polohy, musí být splněna podmínka

$$\frac{(M+m)\sin\alpha}{m} \le 1\,.$$



Obr. R1

Obr. R2



Ke stejnému výsledku můžeme dojít úvahou, že v rovnovážné poloze se těžiště soustavy nachází nad místem dotyku trubky s nakloněnou rovinou. Vzdálenost těžiště soustavy od osy trubky je

$$|ST| = R\frac{m}{M+m}\,.$$

Z obr. R2 plyne:

$$R\frac{m}{M+m}\sin(\alpha+\beta) = R\sin\alpha\,, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \frac{(M+m)\sin\alpha}{m}\,.$$

3 body

Diskuse:

1. Pokud $\dfrac{(M+m)\sin\alpha}{m} < 0$ má rovnice (1) v základním intervalu $\langle 0, 360^\circ)$ dvě řešení (obr. R1). Platí

$$\alpha + \beta_1 < 90^\circ\,, \qquad \alpha + \beta_2 < 90^\circ\,,$$

$$\beta_1 = \arcsin\left[\frac{M+m}{m}\sin\alpha\right] - \alpha\,, \quad \beta_2 = 180^\circ - \arcsin\left[\frac{M+m}{m}\sin\alpha\right] - 2\alpha\,.$$

Pro úhel β_1 je rovnovážná poloha stabilní, pro úhel β_2 je labilní. Plyne to z úvahy o momentech sil při malém vychýlení z rovnovážné polohy či z vyšetření znaménka derivace $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\beta}$ v okolí extrému.

2. Pokud $\dfrac{(M+m)\sin\alpha}{m} = 0$ má rovnice (1) jedno řešení $\beta = 90^\circ - \alpha$ a příslušná rovnovážná poloha je labilní.

2 body

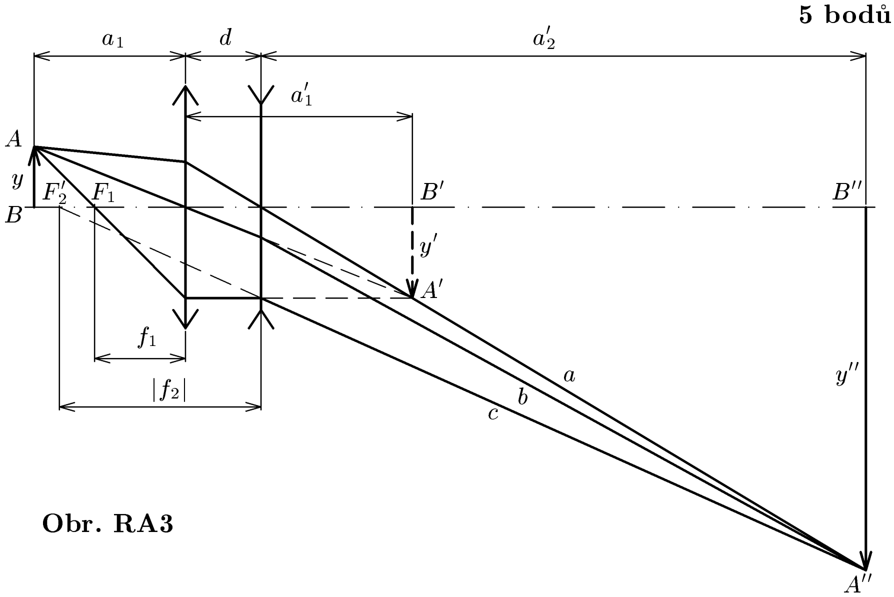
c) Aby se trubka skutálela po nakloněné rovině, musíme ji z polohy stabilní s úhlem β_1 převalit do polohy labilní s úhlem β_2. K tomu je zapotřebí vykonat práci

$$W = E_\mathrm{p}(\beta_2) - E_\mathrm{p}(\beta_1)\,.$$

2 body

2. a) Grafické řešení úlohy pomocí význačných světelných paprsků je na obr. RA3. Nejprve pomocí paprsků a a b nalezneme pomocný obraz A_1 a potom pomocí paprsku c ohniska F_1 a F_2'. Z obrázku je zřejmé, že první čočka je spojka a druhá rozptylka.

5 bodů



Obr. RA3

b) V početním řešení použijeme označení veličin vyznačené v obr. RA5. Z čočkové rovnice a vztahu pro výpočet zvětšení dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1'}=\frac{1}{f_1}\,,\qquad \frac{1}{d-a_1'}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{f_2}\,,\qquad \frac{y'}{y}=-\frac{a_1'}{a_1}\,,\qquad \frac{y''}{y'}=-\frac{a_2'}{d-a_1'}\,,$$

kterou vyřešíme postupně:

$$\frac{y''}{y}=\frac{a_1'a_2'}{a_1\,(d-a_1')}\,,\qquad a_1'=\frac{y''a_1d}{a_2'y+y''a_1}=7{,}5\ \mathrm{cm}\,,$$

$$f_1=\frac{a_1a_1'}{a_1+a_1'}=3{,}0\ \mathrm{cm}\,,$$

$$f_2=\frac{(d-a_1')\,a_2'}{d-a_1'+a_2'}=-6{,}7\ \mathrm{cm}\,,$$

5 bodů

3. a) Tuhost gumového vlákna je

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = 0{,}245\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

1 bod

b) Náboj koule určíme ze vztahu pro výpočet potenciálu. Protože potenciál je kladný, je i náboj koule kladný.

$$\varphi = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,, \qquad Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi = 44\,\mathrm{nC}\,.$$

1 bod

Náboj na kuličce určíme užitím Coulombova zákona. Protože elektrická síla je zřejmě přitažlivá, je náboj kuličky záporný. V rovnovážné poloze platí

$$mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1Q_2|}{d^2} = k(\Delta l + h)\,, \quad mg = k\Delta l\,, \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1Q_2|}{d^2} = kh\,,$$

Spojením předcházejících vztahů dostaneme:

$$Q_1 = -\frac{kh4\pi\varepsilon_0 d^2}{Q_2} = -\frac{mgh4\pi\varepsilon_0 d^2}{\Delta l\,4\pi\varepsilon_0 R\varphi} = -\frac{mghd^2}{\Delta l\,R\varphi} = -31\,\mathrm{nC}\,.$$

2 body

c) Během kmitání působí na kuličku síla vlákna, tíhová síla a elektrická přitažlivá síla nabité koule. Pro svislou souřadnici výsledné sily při okamžité výchylce y platí

$$F = k(\Delta l + h - y) - mg - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1Q_2|}{(d+y)^2} = k(h-y) - kh\frac{d^2}{(d+y)^2}\,.$$

1 bod

Pro $y \ll d$ můžeme provést úpravu

$$F = k(h-y) - kh\frac{1}{\left(1+\frac{y}{d}\right)^2} \doteq -k(h-y) - kh\left(1 - 2\frac{y}{d}\right) = -ky\left(1 - \frac{2h}{d}\right)$$

a napsat pohybovou rovnici kmitů

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,t^2} = -k\left(1 - \frac{2h}{d}\right)y = -m\,\omega^2 y\,,$$

ze které plyne

$$\omega = \sqrt{\frac{k\left(1 - \frac{2h}{d}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{g\left(1 - \frac{2h}{d}\right)}{\Delta l}}\,,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g\left(1 - \frac{2h}{d}\right)}} = 2{,}0\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

Obecné řešení vyhovuje, pokud $d > 2h$. Kdyby platilo $d \leq 2h$, byla by předpokládaná rovnovážná poloha kuličky labilní. Kulička by přiskočila ke kouli, získala by náboj souhlasného znaménka a podmínky úlohy by se změnily.

1 bod

4. a) Odpor mezi svorkami A, B by se nezměnil, kdybychom na začátek řetězce přidali další dva rezistory. Můžeme tedy použít náhradní schéma podle obr. R4, ze kterého odvodíme

$$R_x = R + \frac{R \cdot R_x}{R + R_x}\,.$$

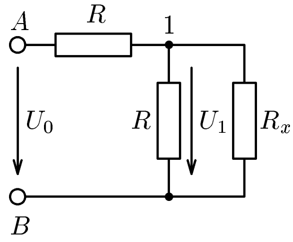
Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$R_x^2 - RR_x - R^2 = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$R_x = \frac{R(1+\sqrt{5})}{2}\,.$$

Obr. R4



4 body

b) Schéma na obr. R4 představuje dělič napětí, na jehož vstupu je napětí U_0 a na výstupu (uzel 1 a svorka B) je napětí U_1. Platí:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\dfrac{R \cdot R_x}{R + R_x}}{R + \dfrac{R \cdot R_x}{R + R_x}}\,,$$

$$\frac{R \cdot R_x}{R + R_x} = \frac{R \cdot \dfrac{R(1+\sqrt{5})}{2}}{R + \dfrac{R(1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{R(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,,$$

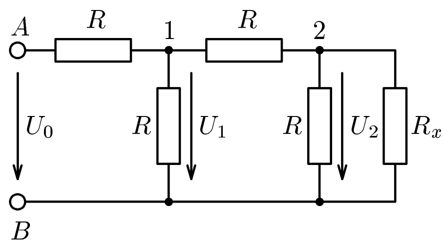
$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\dfrac{R(\sqrt{5}-1}{2}}{R + \dfrac{R(\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \doteq 0{,}382\,, \qquad U_1 = U_0\,\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \doteq 0{,}382\,.$$

3 body

c) Pro určení napětí U_2 překreslíme schema podle obr. R5. Řetěz rezistorů napravo od uzlu 1 se opět chová jako dělič napětí z obr. R4. Proto

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_1}{U_0} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\,.$$

Obr. R5



Obdobně bychom postupovali u dalších uzlů. Vidíme, že uzlová napětí tvoří geometrickou posloupnost

$$U_i = U_0\, q^i\,, \qquad q = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \doteq 0{,}382\,.$$

Pořadové číslo nejbližšího uzlu, kde napětí klesne pod $0{,}01\, U_0$, určíme řešením nerovnice:

$$U_i = U_0\, q^i < 0{,}01\, U_0\,, \qquad q^i <= 0{,}01\,, \qquad i \cdot \log q < -2\,,$$

$$i > \frac{-2}{\log q} \doteq \frac{-2}{\log 0{,}382} \doteq 4{,}8\,.$$

Podmínce vyhovuje $i = 5$.

3 body