**Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.**

*Kategorie B*

Autoři úloh: L'. Mucha (2, 3), a P. Šedivý (1, 4)

**1.** a) Před dopadem na kvádr získá kulička (podle zákona zachování energie) rychlost o velikosti

$$v_1 = \sqrt{2gl} = 4{,}43\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Těsně po odrazu bude mít kulička rychlost o velikosti $u_1$ (ve směru zpět) a kvádr rychlost o velikosti $u_2$ (ve směru nárazu). Jestliže se po odrazu kulička vychýlí o úhel $\alpha_1$, platí podle ZZE:

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = mgl(1-\cos\alpha_1)\,. \quad \text{Z toho} \quad u_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)} = 1{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

**2 body**

b) Podle zákona zachování hybnosti

$$mv_1 = -mu_1 + Mu_2\,, \qquad u_2 = \frac{m}{M}(v_1+u_1) = \frac{m}{M}\left(1+\sqrt{1-\cos\alpha_1}\right)\sqrt{2gl}\,.$$

Během brzdění kvádr ztratí kinetickou energii a vykoná práci proti síle tření:

$$W = F_\mathrm{t} d = fMgd = \frac{1}{2}Mu_2^2\,,$$

$$d = \frac{u_2^2}{2fg} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{l}{f}\left(1+\sqrt{1-\cos\alpha_1}\right)^2 = 0{,}47\ \mathrm{m}\,.$$

**4 body**

c) V případě dokonale pružného odrazu by platil zákon zachování hybnosti i zákon zachování energie:

$$mv_1 = -mu_1 + Mu_2\,, \qquad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2\,.$$

Řešením této soustavy rovnic určíme velikost rychlosti kuličky po odrazu:

$$u_1 = \frac{M-m}{M+m}v_1\,.$$

Pro vychýlení kuličky platí podobně jako v a): $\frac{1}{2}mu_1^2 = mgl(1-\cos\alpha_2)\,,$

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{u_1^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} = 0{,}64\,, \qquad \alpha_2 \doteq 50^\circ\,.$$

**4 body**

**2.** a) Při pohybu lyžaře se uplatní pohybová složka tíhové síly, smykové tření a odpor vzduchu. Výslednice těchto sil má velikost

$$F = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Kv^2 \,.$$

Na velmi dlouhém svahu dosáhne rychlost lyžaře mezní hodnoty $v_\mathrm{m}$, při které je výslednice všech sil nulová a platí

$$mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Kv_\mathrm{m}^2 = 0 \,,$$

$$K = \frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{v_\mathrm{m}^2} = 0{,}5605\ \mathrm{N\cdot m^{-2}\cdot s^2} \,.$$

**3 body**

b) Při modelování pohybu numerickou metodou pomocí jednodušší kalkulačky zvolíme časový krok $\Delta t = h = 1\,\mathrm{s}$. Okamžité zrychlení lyžaře v čase $t_i$ je

$$a_i = \frac{F}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{K}{m}v^2 = a_0 - Lv^2 \,.$$

$$a_0 = 2{,}0178\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \,, \qquad L = 0{,}006228\ \mathrm{m^{-1}} \,.$$

(Zaokrouhlíme až konečné výsledky.)

Při postupném výpočtu dráhy a rychlosti můžeme použít rekurentní vztahy

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot h \,, \qquad s_{i+1} = s_i + v_i \cdot h + \frac{1}{2}a_i \cdot h^2 = s_i + \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \cdot h \,.$$

**3 body**

Výsledky výpočtů jsou uvedeny v levé tabulce. Pokud bychom zvolili kratší časový krok, přesnost modelu by se zvětšila a hodnoty by se přibližovaly k přesným hodnotám získaným analytickým řešením úlohy, které jsou uvedeny v pravé tabulce.

**Zpracování tabulky 3 body**

c) I při omezené přesnosti použité metody můžeme z tabulky vyčíst, že lyžař projede prvních 50 m za dobu mezi 7 s a 8 s a na této dráze získá rychlost přibližně $12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

**1 bod**

| numeri | | cká metoda | | | přesný \ | ýpočet |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ / s | $s$ / m | $v$ / m.s$^{-1}$ | $a$ / n | ı.s$^{-2}$ | $s$ / m | $v$ / m.s$^{-1}$ |
| 0 | 0,00 | 0,000 | 2,0 | 178 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | 1,009 | 2,018 | 1,9 | 924 | 1,007 | 2,009 |
| 2 | 4,023 | 4,010 | 1,9 | 176 | 4,002 | 3,969 |
| 3 | 8,992 | 5,928 | 1,7 | 989 | 8,914 | 5,835 |
| 4 | 15,819 | 7,727 | 1,6 | 460 | 15,629 | 7,571 |
| 5 | 24,369 | 9,373 | 1,4 | 707 | 24,003 | 9,150 |
| 6 | 34,477 | 10,843 | 1,2 | 855 | 33,873 | 10,561 |
| 7 | 45,964 | 12,129 | 1,1 | 016 | 45,066 | 11,797 |
| 8 | 58,643 | 13,231 | 0,9 | 276 | 57,411 | 12,865 |
| 9 | 72,338 | 14,158 | 0,7 | 694 | 70,745 | 13,776 |
| 10 | 86,881 | 14,928 | 0,6 | 300 | 84,915 | 14,543 |

**3.** Kuličky na sebe ve vakuu vzájemně působí odpudivou silou

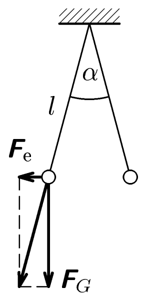
$$F_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, \qquad \text{kde} \qquad r = 2l\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Výsledná síla, která vzniká složením síly elektrické a síly tíhové, má směr vlákna a platí

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{F_\mathrm{e}}{F_G} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg4l^2\sin^2(\alpha/2)} =$$

$$= \frac{3Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varrho g l^2 d^3\sin^2(\alpha/2)}\,.$$

**Obr. R1**




Elektrický náboj kuliček je

$$Q = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}\varepsilon_0\varrho g l^2 d^3\sin^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/2)} = 54\ \mathrm{nC}\,.$$

**5 bodů**

Po ponoření do dielektrické kapaliny se elektrické síly zmenší $\varepsilon_\mathrm{r}$krát a proti tíhové síle bude působit síla vztlaková.

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{F_\mathrm{er}}{F_G - F_\mathrm{v}} = \frac{3Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(\varrho-\varrho_0)g l^2 d^3\sin^2(\beta/2)}\,.$$

Vydělením rovnic dostaneme

$$\frac{\mathrm{tg}(\alpha/2)}{\mathrm{tg}(\beta/2)} = \varepsilon_\mathrm{r} \frac{(\varrho - \varrho_0)\sin^2(\beta/2)}{\varrho \sin^2(\alpha/2)} ,$$

$$\varepsilon_\mathrm{r} = \frac{\varrho \sin^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/2)}{(\varrho - \varrho_0)\sin^2(\beta/2)\,\mathrm{tg}(\beta/2)} = 8{,}7 .$$

**5 bodů**

**4.** a) Na horním obrázku předbíhá proud před napětím časově o $T/4$, fázově o $\pi/2$. Jedná se tedy o obvod s kondenzátorem. Na dolním obrázku je proud opožděn za napětím časově o necelou čtvrtinu periody, fázově o necelou polovinu $\pi$. Jedná se tedy o obvod s cívkou, která ovšem není ideální a má nezanedbatelnou rezistanci. **1 bod**

b) Obvodem s kondenzátorem prochází proud o periodě $T = 0{,}040$ s. Amplitudy napětí a proudu jsou $U_\mathrm{m} = 4{,}0$ V a $I_\mathrm{m} = 2{,}7$ mA. **1 bod**

Platí: $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{U_\mathrm{m}}{I_\mathrm{m}}$, $\quad C = \dfrac{I_\mathrm{m}}{\omega U_\mathrm{m}} = \dfrac{T I_\mathrm{m}}{2\pi U_\mathrm{m}}$ . **1 bod**

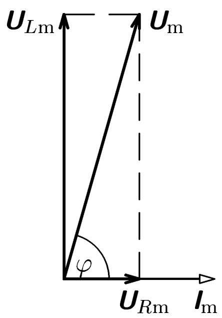
Numericky: $C = 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ F $= 4{,}3\ \mu$F. **1 bod**

c) Obvodem s cívkou prochází proud s periodou $T = 0{,}80$ s, který je opožděn za napětím o dobu $\tau = 0{,}16$ s. Fázové posunutí je tedy

$$\varphi = \frac{\tau}{T} 2\pi = 0{,}40\,\pi = 72^\circ .$$

Amplitudy napětí a proudu jsou $U_\mathrm{m} = 4{,}0$ V a $I_\mathrm{m} = 4{,}8$ mA. **2 body**

**Obr. R1**




Sériovému spojení ideální cívky s ideálním rezistorem přísluší fázorový diagram na obr. R1, ze kterého odvodíme:

$$U_{R\mathrm{m}} = U_\mathrm{m} \cos\varphi = 1{,}24 \text{ V} ,$$

$$U_{L\mathrm{m}} = U_\mathrm{m} \sin\varphi = 3{,}8 \text{ V} .$$

Dále platí: $R = \dfrac{U_{R\mathrm{m}}}{I_\mathrm{m}}$, $\quad X_L = \omega L = \dfrac{U_{L\mathrm{m}}}{I_\mathrm{m}}$ ,

$L = \dfrac{U_{L\mathrm{m}} T}{2\pi I_\mathrm{m}}$ . **3 body**

Numericky: $R \doteq 260\ \Omega$, $L \doteq 100$ H. **1 bod**