Řešení úloh regionálního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1. a) B: Rovnoměrný pohyb, tj. $a = 0$ (přesně).

C: Rovnoměrně zpomalený pohyb, určíme směrnici přímky:

$$a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = 0{,}19\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\ \text{(tolerance 0,18 až 0,20).}$$

A: Sestrojíme tečnu ke křivce v čase $t_1 = 10$ s, změříme směrnici:

$$a \doteq 0{,}283\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\ \text{(tolerance 0,27 až 0,30).}$$

3 body

b) V čase $t_1 = 10$ s : 1. C, 2. B, 3. A.
V čase $t_2 = 25$ s : 1. A, 2. C, 3. B.

2 body

c) Hledáme čas t_3 od počátku pohybu, v němž se obsahy ploch pod příslušnými grafy budou přibližně rovnat. Vychází přibližně 13, 9 s (tolerance 13,2 až 14,6).

1 bod

d) Čas zastavení je $t_4 = v_0/a$, kde $v_0 = 7{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (z grafu) a zrychlení $a = 0{,}19\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (z úlohy a)). Vychází $t_4 = 38{,}9$ s (tolerance 37,0 až 40,9).

1 bod

e) Platí $v_\mathrm{p} = \Delta s/\Delta t$, kde Δs určíme jako obsah plochy pod příslušným grafem na časovém intervalu $\langle 0; 20\rangle s$ ($\Delta t = 20$ s). Vychází

$$v_\mathrm{p} \doteq \tfrac{113}{20}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 5{,}65\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\ \text{(tolerance 5,3 až 6,0).}$$

1 bod

f) Hledané vzdálenosti d odpovídá obsah plochy mezi příslušnými grafy od času $t = 0$ do jejich průsečíku. Vychází 9,0 m (tolerance 8,5 až 9,5).

1 bod

g) Sestrojíme přímku se směrnicí $\frac{1}{3}$ a posuneme ji ke křivce jako tečnu. Takto odhadnutý bod dotyku odpovídá přibližně času 7,06 s (tolerance 6,7 až 7,4).

1 bod

Poznámka: Graf A představuje pohyb se stálým výkonem urychlující síly.

2. a) Ze vztahů $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$, $v_1 = at_1$ plyne $v_1 = \dfrac{2s_1}{t_1}$. **1 bod**

b) Srážka splňuje zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie:

$$3mv_1 = 3mv_1' + mv_2' , \qquad \frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 .$$

Řešením rovnic dostaneme: $v_1' = \dfrac{v_1}{2} = \dfrac{s_1}{t_1}$, $v_2' = \dfrac{3v_1}{2} = \dfrac{3s_1}{t_1}$. (1, 2)

2 body

c) Mezi srážkami urazí lokomotiva i vagón stejnou dráhu:

$$v_2't_2 = v_1't_2 + \frac{1}{2}at_2^2 , \quad \text{kde} \quad a = \frac{v_1}{t_1} .$$

Dosazením výsledků (1, 2) a úpravou dostaneme $t_2 = 2t_1$. **1 bod**

d) Pro dráhu s_1 do první srážky a dráhu s_2 mezi srážkami platí

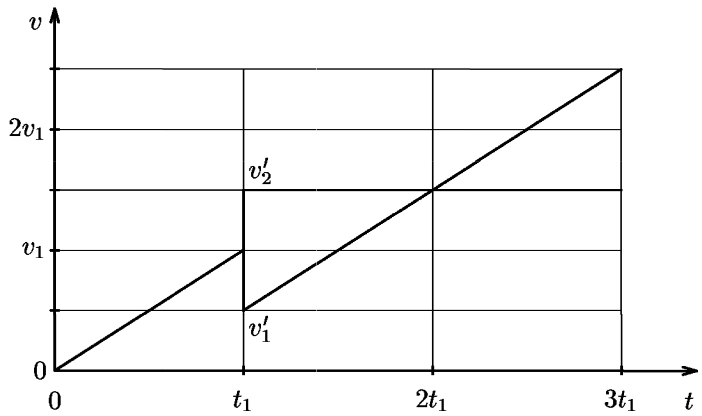
$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_1t_1}{2} , \qquad s_2 = v_2't_2 = \frac{3}{2}v_1 \cdot 2t_1 = 3v_1t_1 .$$

Srovnáním dostaneme $s_2 = 6s_1$. **1 bod**

e) Označme $\Delta E = \frac{1}{2}mv_2'^2$ úbytek kinetické energie lokomotivy, resp. přírůstek kinetické energie vagónu, při první srážce a $E_k = \frac{1}{2}3mv_1^2$ kinetickou energii lokomotivy bezprostředně před první srážkou. Hledaný poměr po dosazení z výsledku (2) pak je $\Delta E/E_k = 0{,}75$.

1 bod

f)



4 body

3. a) , b) Pro souřadnice kladiva během vrhu v závislosti na čase platí:

$$x = v_0 t \cos\alpha \,,$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \,. \tag{1}$$

Dosazením $t = t_1,\ x = d,\ y = 0$ dostaneme

$$d = v_0 t_1 \cos\alpha \,, \qquad 0 = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} s t_1^2 \,.$$

Z rovnic plyne

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}} \doteq 28\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \,, \tag{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g} \operatorname{tg}\alpha} \doteq 4{,}0\ \mathrm{s} \,. \tag{3}$$

4 body

c) Dosazením $y = h,\ t = \frac{1}{2} t_1$ do rovnice (1) dostaneme

$$h = \frac{1}{2} v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{8} g t_1^2 \,.$$

Dosazením z rovnic (2) a (3) do této rovnice pak máme

$$h = \frac{1}{4} d \operatorname{tg}\alpha = 20{,}0\ \mathrm{m} \,.$$

2 body

d) Hledaná síla je odstředivá síla o velikosti $F = \dfrac{m v_0^2}{r}$.
Po dosazení z rovnice (2) dostaneme

$$F = \frac{mgd}{r \sin 2\alpha} \doteq 3\,200\ \mathrm{N} \,.$$

2 body

e) Dosazením vztahu (2) do rovnice $T = \dfrac{2\pi r}{v_0}$ dostaneme

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{gd}} \doteq 0{,}40\ \mathrm{s} \,.$$

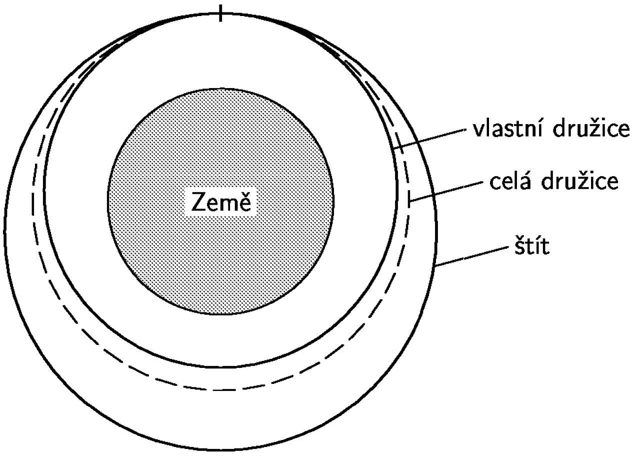
2 body

4. a) Z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\varkappa \frac{Mm}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \qquad \text{plyne} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\varkappa M}}\,.$$

Číselně vychází $T \doteq 9\,950\ \mathrm{s} \doteq 2{,}76\ \mathrm{h} \doteq 2\ \mathrm{h}\ 46\ \mathrm{min}$. **2 body**

b) Náčrt:



2 body

c) Vlastní družice má menší velikost hlavní poloosy, tudíž podle 3. Keplerova zákona má kratší dobu oběhu a dorazí do téhož místa dříve než její štít, který obíhá Zemi po elipse s větší velikostí hlavní poloosy.

2 body

d) Pružiny při uvolnění vykonají stejnou práci na Zemi jako na oběžné dráze, proto z hlediska vztažné soustavy celé družice platí:

$$\frac{1}{2}m_2 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\,,$$

kde v_1, v_2 jsou po řadě získané rychlosti vlastní družice a štítu z hlediska vztažné soustavy původní družice na oběžné dráze. Současně je splněn zákon zachování hybnosti, z hlediska vztažné soustavy původní družice se velikosti hybností rovnají:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2\,.$$

Z rovnic plyne

$$v_1 = \frac{m_1}{\sqrt{m_1(m_1+m_2)}}v_0\,, \qquad v_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_1(m_1+m_2)}}v_0\,.$$

Hledaná vzájemná rychlost w družice a štítu je

$$w = v_1 + v_2 = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}v_0 \doteq 6{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ **4 body**