Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autorka úloh: R. Horáková(1, 2, 3) a I. Volf (4)

1.a) Kdyby koule byla plná, platilo by:

$$F = F_G - F_{\mathrm{vz}} = mg - V\varrho_1 g = mg\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = 8{,}54\ \mathrm{N}\,.$$

Údaj siloměru je menší — koule musí mít dutinu.

3 body

b) Označíme objem dutiny V_1, objem celé koule V. Potom platí:

$$m = \varrho(V - V_1), \quad \text{odtud} \quad V = \frac{m}{\varrho} + V_1\,.$$

V rovnovážném stavu platí:

$$F = mg - V\varrho_1 g = mg - \left(\frac{m}{\varrho} + V_1\right)\varrho_1 g,$$

4 body

Úpravou vyjádříme V_1:

$$V_1 = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) - F}{g\varrho_1} = 50{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \doteq 51\ \mathrm{cm}^3\,.$$

Koule je dutá, objem dutiny je 51 cm^3.

3 body

2.a) Během zachycení střely získá kvádr rychlost $\boldsymbol{v}_1$, jejíž velikost určíme pomocí zákona zachování hybnosti:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_1\,, \qquad v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Pohyb kvádru se střelou je rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí v_1. Pro velikost a_1 jeho zrychlení platí:

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_1 + m_2)g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,, \qquad a_1 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,.$$

Pro okamžitou rychlost platí: $v = v_1 - a_1 t$. Kvádr stoupá, pokud se velikost okamžité rychlosti nezmenší na nulu, tedy po dobu $t_1 = \frac{v_1}{a_1}$. Přitom urazí dráhu

$$s = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)^2 g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

a vystoupí do výšky

$$h = s\sin\alpha = \frac{m_2^2 v_2^2 \sin\alpha}{2(m_1 + m_2)^2 g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\,.$$

4 body

b) Aby se kvádr po zastavení začal pohybovat směrem dolů, musí být pohybová složka tíhové síly větší než třecí síla, tedy

$$(m_1 + m_2)g \sin\alpha > (m_1 + m_2)gf \cos\alpha\,, \qquad \text{tedy} \quad f < \operatorname{tg}\alpha\,.$$

2 body

c) Pohyb kvádru dolů je rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti $a_2 = g \sin\alpha - fg \cos\alpha$. Dráhu s kvádr proběhne za dobu $t_2 = \sqrt{2s/a_2}$. Celková doba pohybu je

$$t_c = \frac{v_1}{a_1} + \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2)g}\left(\frac{1}{\sin\alpha + f\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}}\right).$$

4 body

3.a) Během úniku plynu, kdy tlak klesl z hodnoty p_1 na hodnotu p_2, můžeme předpokládat, že se plyn adiabaticky rozepnul z objemu V_1 (objem nádoby) na objem V_2. (Stavové veličiny plynu v nádobě nejsou ovlivněny skutečným stavem plynu, který z nádoby unikl). Platí:

$$p_1 V_1^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}\,, \qquad \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\frac{m}{V_2}}{\frac{m}{V_1}} = \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\,,$$

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho_1} = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1} = 1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = 0{,}225 = 22{,}5\ \%\,.$$

Hustota plynu se zmenšila o 22,5 %.

6 bodů

b) Do konečného stavu se plyn může dostat přímo izotermickým dějem:

$$p_1 V_1 = p_3 V_2\,, \qquad p_3 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = 0{,}775 p_1 = 116\ \mathrm{kPa}\,.$$

Konečný tlak plynu je 116 kPa.

4 body

Ke stejnému výsledku dojdeme i postupným výpočtem přes adiabatickou expanzi a izochorické ohřátí:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 1{,}107 \cdot 0{,}7 = 0{,}775\,.$$

4. a) Porovnáme údaje o planetce Eros a Zemi:

$$\frac{a^3}{r_z^3} = \frac{T^2}{T_z^2}\,, \qquad a = r_z \left(\frac{T}{T_z}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}458\ \mathrm{AU} = 218{,}1 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

$$e = \varepsilon a = 0{,}325\ \mathrm{AU} = 48{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,,$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 1{,}421\ \mathrm{AU} = 212{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,,$$

$$r_\mathrm{p} = a - e = 1{,}133\ \mathrm{AU} = 169{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,,$$

$$r_\mathrm{a} = a + e = 1{,}783\ \mathrm{AU} = 266{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

b) Užitím plošné rychlosti:

$$w = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1{,}457 \cdot 10^{23}\ \mathrm{m}^2}{5{,}556 \cdot 10^7\ \mathrm{s}} = 2{,}622 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1} = \frac{v_\mathrm{p} r_\mathrm{p}}{2} = \frac{v_\mathrm{a} r_\mathrm{a}}{2}\,.$$

$$v_\mathrm{p} = \frac{2w}{r_\mathrm{p}} = 30{,}9\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad v_\mathrm{a} = \frac{2w}{r_\mathrm{a}} = 19{,}7\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

Užitím vztahu $v = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$:

$$\frac{\varkappa M m_z}{r_z^2} = \frac{4\pi^2}{T_z^2} r_z m_z\,, \qquad \varkappa M = \frac{4\pi^2 r_z^3}{T_z^2} = 1{,}327 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}\,,$$

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\left(\frac{2}{1-\varepsilon} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 30{,}9\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,,$$

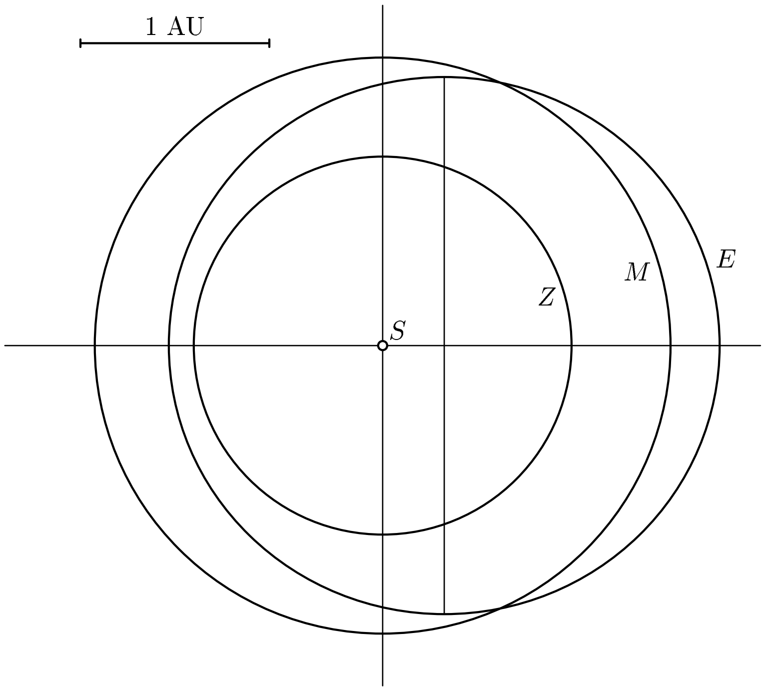
$$v_\mathrm{a} = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r_\mathrm{a}} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\left(\frac{2}{1+\varepsilon} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 19{,}7\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

c) Dopočítáme poloměr trajektorie Marsu:

$$r_{\mathrm{m}} = r_{\mathrm{z}} \left(\frac{T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{z}}} \right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}524\ \mathrm{AU} = 228{,}0 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

Trajektorie Země Marsu a Erosu na obr. R1 jsou nakresleny v měřítku 1 AU$\widehat{=}$25 mm.



Obr. R1