Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1,2,3,5,6,7), I. Volf (4)

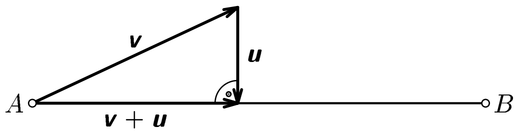
1. a) Za bezvětří letí letadlo rychlostí $v = d/t_0 = 200\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Největší zpoždění bude při letu proti větru, a to

$$\Delta t_1 = \frac{d}{v-u} - t_0 = 0{,}15\ \mathrm{h} = 9\ \mathrm{min},$$ **2 body**

b) Největší předstih bude při letu po větru, a to

$$\Delta t_2 = t_0 - \frac{d}{v+u} = 0{,}10\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{min},$$ **2 body**

c) Označme $\boldsymbol{v}$ rychlost letadla vzhledem ke vzduchu. Vyjdeme z obrázku:

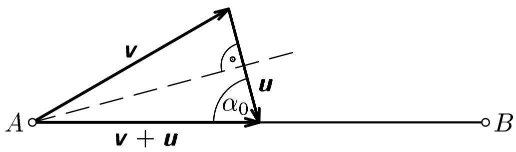


Obr. R1

Časový rozdíl bude

$$\Delta t_3 = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}} - t_0 \doteq 45\ \mathrm{s}, \quad \text{tj. zpoždění.}$$ **2 body**

d) Úhel α_0, o který musí být směr větru odchýlen od směru letu za bezvětří, aby letadlo dorazilo do cíle včas, tj. jako za bezvětří, můžeme nalézt graficky podle obr. R2. Platí $|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}| = v$:



Obr. R2

Z konstrukce plyne

$$\cos\alpha_0 = \frac{0{,}5u}{v} = 0{,}1\,, \qquad \alpha_0 \doteq 84{,}3^\circ\,.$$

Pro $\alpha < \alpha_0$ dorazí letadlo s předstihem, pro $\alpha > \alpha_0$ dorazí se zpožděním. Pravděpodobnost, že letadlo nedorazí se zpožděním, je

$$p = \alpha_0/180^\circ \doteq 0{,}47\,.$$ **4 body**

2. a) Z rovnic

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t_1}\,, \qquad d_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{2}a t_1^2\,, \tag{1}$$

dostaneme

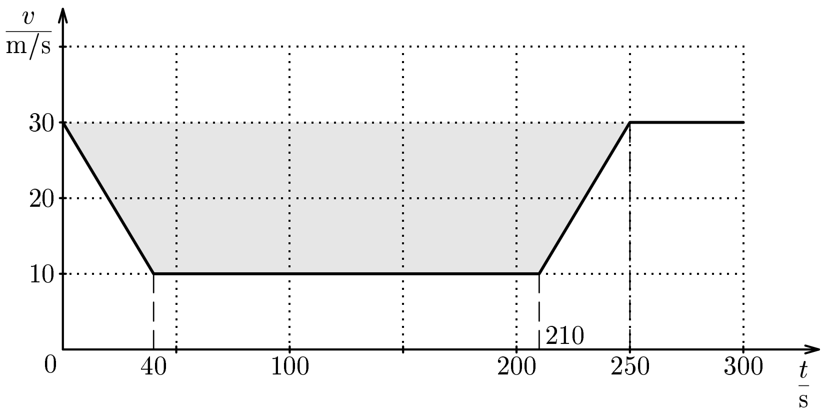
$$t_1 = \frac{2d_1}{v_1+v_2} = 40\ \mathrm{s}\,. \tag{2}$$

2 body

b) Dosazením vztahu (2) do vztahu (1) pak dostaneme hledané zrychlení

$$a = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2d_1} = 0{,}50\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

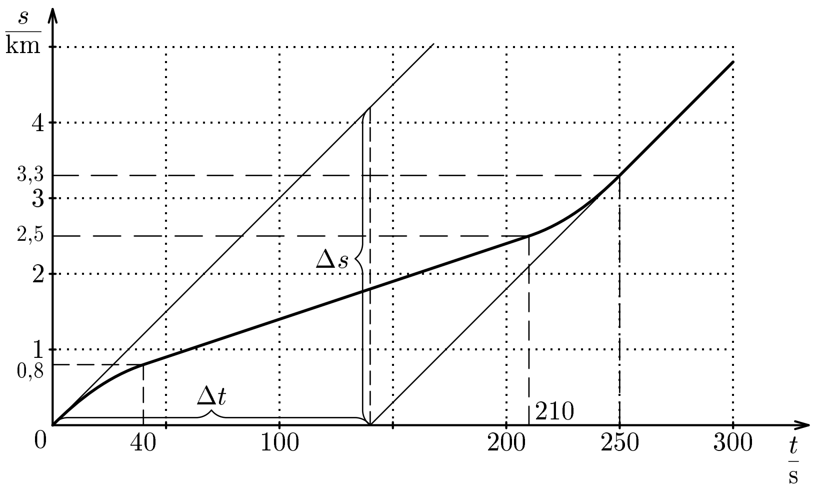
c)



Obr. R3

Hledaný dráhový rozdíl je určen plošným obsahem vyplněného lichoběžníka. Vychází $\Delta s = 4\,200\ \mathrm{m}$. **3 body**

d)



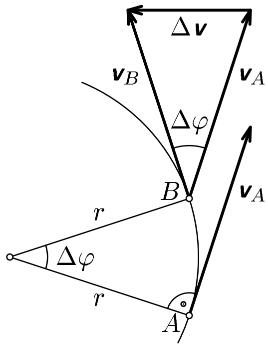
Obr. R4

Dráhový a časový rozdíl jsou určeny úsečkami vynesenými do grafu. Vychází $\Delta s = 4\,200\ \mathrm{m}$, $\Delta t = 2\ \mathrm{min}\ 20\ \mathrm{s}$. **3 body**

3. a) Sedačka se pohybuje rychlostí

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 5{,}23599\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 5{,}24\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Ukázka konstrukce:



$\frac{\Delta\varphi}{^\circ}$	$\frac{\Delta t}{\mathrm{s}}$	$\frac{\lvert\Delta \boldsymbol{v}\rvert}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	$\frac{\lvert\Delta \boldsymbol{v}\rvert/\Delta t}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$
90	1,5	7,40	4,94
60	1	5,24	5,24
30	0,5	2,71	5,42
20	1/3	1,82	5,46
10	1/6	0,91	5,48

Obr. R5

6 bodů

b) Velikost dostředivého zrychlení je $a_\mathrm{d} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 5{,}4831135\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 5{,}48\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$ **2 body**

c) Se zkracováním časového intervalu, a tedy s klesajícím úhlem, se hodnota zjištěná konstrukcí více blíží skutečné hodnotě a_d. **1 bod**

d) Se zkracováním časového intervalu a tedy s klesajícím úhlem se směr vektoru $\Delta\boldsymbol{v}$ více blíží směru vektoru $\boldsymbol{a}_\mathrm{d}$. **1 bod**

Poznámka: Uvedeným postupem s obecným náčrtkem jste si pravděpodobně odvodili vzorec pro dostředivé zrychlení na hodinách fyziky. Z náčrtku jste úvahou dospěli k závěru, že pro velmi malý časový interval můžeme velmi malý kruhový oblouk za tuto dobu opsaný nahradit úsečkou. Přesnost výsledku lze vyjádřit výrazem $2\sin(\Delta\varphi/2)/\Delta\varphi$. Tento výraz se s klesajícím úhlem blíží číslu 1.

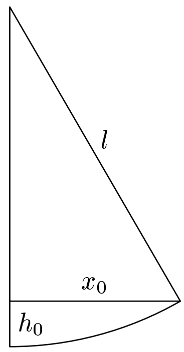
4. a) Vychýlením kuličky do vzdálenosti x_0 od stěny ji současně zvedneme do výšky (obr. R1)

$$h_0 = l - \sqrt{l^2 - x_0^2} = 0{,}0762 \text{ m}.$$

Po prvním odrazu kulička vystoupí do výšky

$$h_1 = l - \sqrt{l^2 - x_1^2} = 0{,}0506 \text{ m}.$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne



Obr. R6

$$v_0 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2g\left(l - \sqrt{l^2 - x_0^2}\right)} = 1{,}22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2g\left(l - \sqrt{l^2 - x_1^2}\right)} = 1{,}00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

4 body

Koeficient restituce je

$$k = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - x_1^2}}{l - \sqrt{l^2 - x_0^2}}} = 0{,}81.$$

2 body

b) Po druhém odrazu kulička vystoupí do výšky

$$h_2 = l - \sqrt{l^2 - x_2^2}.$$

Platí:

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \quad h_2 = h_1 k^2 = 0{,}0335 \text{ m}, \quad x_2 = \sqrt{l^2 - (l - h^2)^2} = 40 \text{ cm}.$$

4 body

5. a) Označme t_1 dobu působení sportovce na břemeno a a_1 zrychlení udělované břemenu. Z rovnic

$$a_1 = \frac{F - mg}{m} \tag{1}$$

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \tag{2}$$

$$v_1 = a_1 t_1 \tag{3}$$

plyne

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(F - mg)s_1}{m}} \doteq 9{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,. \tag{4}$$

2 body

b) Práce vykonaná sportovcem je rovna potenciální energii břemene v nejvyšším bodě:

$$W = Fs_1 = mgh_1\,, \qquad h_1 = \frac{Fs_1}{mg} = 5{,}7\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

c) Z rovnic (2), (3), (4) a z rovnice $P = \dfrac{Fs_1}{t_1}$ plyne

$$P = \frac{1}{2}Fv_1 = F\sqrt{\frac{F - mg}{2m}s_1}. \doteq 1{,}89\ \mathrm{kW}\,.$$

2 body

d) Hodnoty nutné k sestrojení grafů:
čas uvolnění tělesa z rukou sportovce

$$t_1 = \sqrt{\frac{2ms_1}{F - mg}} \doteq 0{,}36\ \mathrm{s}\,,$$

čas dosažení výšky h_1

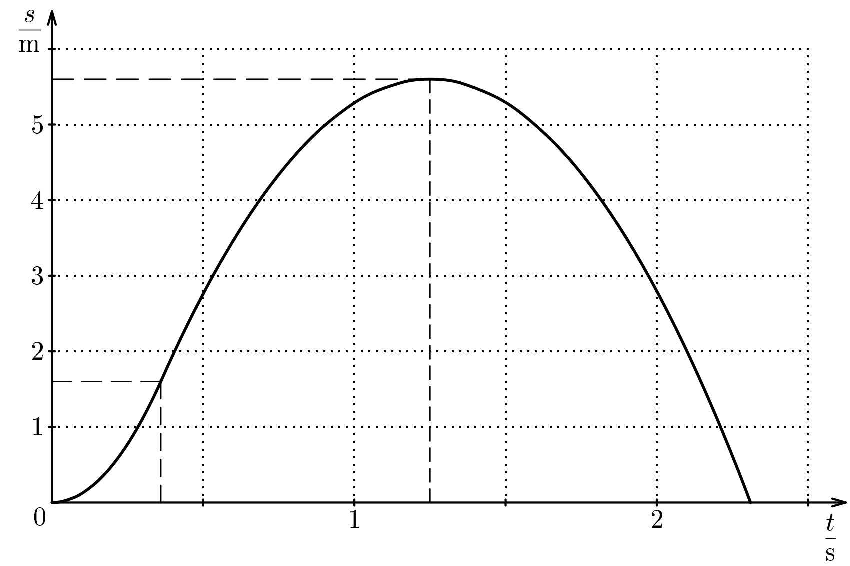
$$t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{2(h_1 - s_1)}{g}} \doteq 1{,}27\ \mathrm{s}\,,$$

čas dopadu

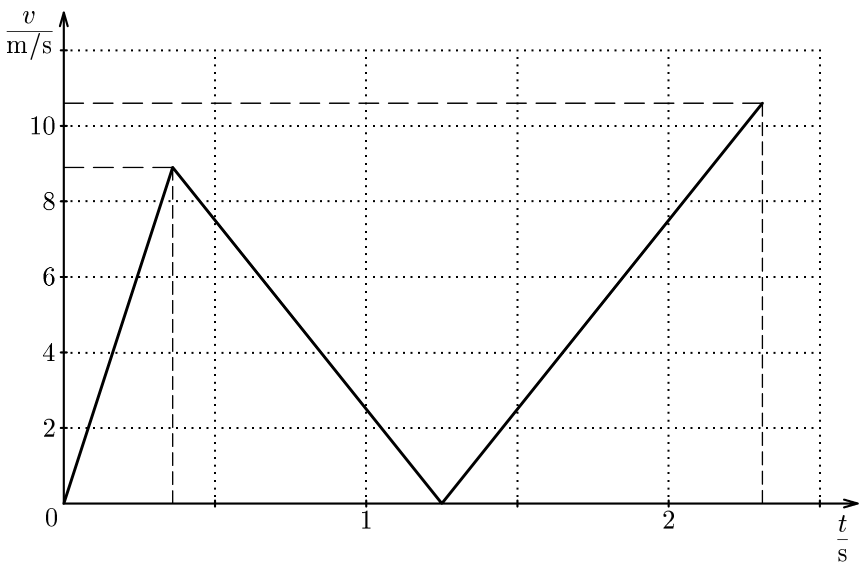
$$t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \doteq 2{,}35\ \mathrm{s}\,,$$

rychlost dopadu

$$v_2 = \sqrt{2gh_1} \doteq 10{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$



Obr. R7



Obr. R8

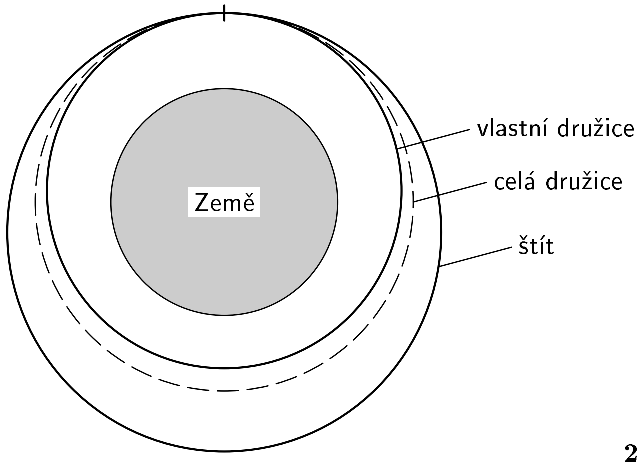
4 body

7. a) Z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\varkappa\frac{Mm}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \qquad \text{plyne} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\varkappa M}}\,.$$

Číselně vychází $T \doteq 9\,950\ \mathrm{s} \doteq 2{,}76\ \mathrm{h} \doteq 2\ \mathrm{h}\ 46\ \mathrm{min}$. **2 body**

b) Náčrt:



Obr. R9

2 body

c) Vlastní družice má menší velikost hlavní poloosy, tudíž podle 3. Keplerova zákona má kratší dobu oběhu a dorazí do téhož místa dříve než její štít, který obíhá Zemi po elipse s větší velikostí hlavní poloosy.

2 body

d) Pružiny při uvolnění vykonají stejnou práci na Zemi jako na oběžné dráze, proto z hlediska vztažné soustavy celé družice platí:

$$\frac{1}{2}m_2 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\,,$$

kde v_1, v_2 jsou po řadě získané rychlosti vlastní družice a štítu z hlediska vztažné soustavy původní družice na oběžné dráze. Současně je splněn zákon zachování hybnosti, z hlediska vztažné soustavy původní družice se velikosti hybností rovnají:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2\,.$$

Z rovnic plyne

$$v_1 = \frac{m_2}{\sqrt{m_1(m_1+m_2)}}v_0\,, \qquad v_2 = \frac{m_1}{\sqrt{m_1(m_1+m_2)}}v_0\,.$$

Hledaná vzájemná rychlost w družice a štítu je

$$w = v_1 + v_2 = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}v_0 \doteq 6{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ **4 body**