Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 4) a L. Mucha (3)

1. a) Každé vozidlo má maximální rychlost na úseku rovnoměrného pohybu. Z grafu odečteme dráhu Δs a odpovídající dobu Δt:

$$A: \quad v_{\max} = \frac{16\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{s}} = 4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad B: \quad v_{\max} = \frac{(30-12)\ \mathrm{m}}{(9-6)\ \mathrm{s}} = 6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Zrychlení v čase t_1 určíme z celého úseku rovnoměrně zpomaleného, resp. zrychleného , pohybu. Vozidlo A od 4. do 9. sekundy zastavilo z rychlosti $v_{\max} = 4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Během zastavování urazilo dráhu $(26-16)\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{m}$.

$$a = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{v_{\max}}{\Delta t} = \frac{4}{9-4}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

nebo

$$a = \frac{2\Delta s}{(\Delta t)^2} = \frac{2(26-16)}{(9-4)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Vozidlo B od 2. do 6. sekundy dosáhlo z klidu rychlosti $v_{\max} = 6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, resp. urazilo dráhu 12 m.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\max}}{\Delta t} = \frac{6}{6-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

nebo

$$a = \frac{2\Delta s}{(\Delta t)^2} = \frac{2(12-0)}{(6-2)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

c) Vozidlo B získá z klidu za dobu Δt se zrychlením $a = 1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ okamžitou rychlost $v = 2{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, tedy

$$\Delta t = \frac{v}{a} = \frac{2{,}1}{1{,}5}\ \mathrm{s} = 1{,}4\ \mathrm{s}\,. \quad \text{Hledaný čas je } t_2 = (2+1{,}4)\ \mathrm{s} = 3{,}4\ \mathrm{s}\,.$$

1 bod

d) V čase $t_3 = 7{,}5$ s zbývá do zastavení doba $\Delta t = 1{,}5$ s při zrychlení $a = 0{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Je proto hledaná rychlost

$$v = a\Delta t = (0{,}8 \cdot 1{,}5)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

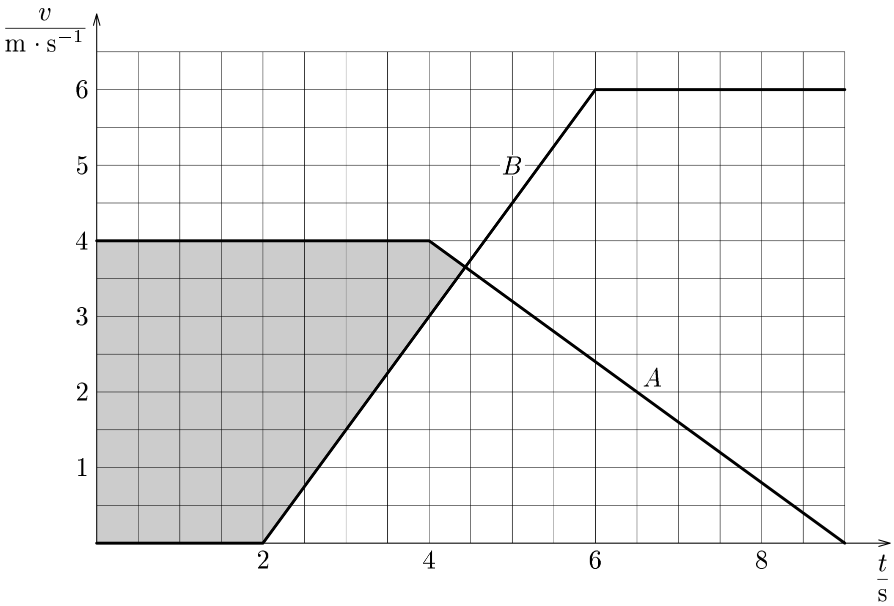
1 bod

e) Grafy rychlostí obou vozidel — viz obr. R1. **2 body**

f) Z původního grafu na obr. 1 získáme maximální vzdálenost mezi vozidly odečtením drah v čase, kdy je tento rozdíl maximální. Z grafu na obr. R1 zjistíme maximální vzdálenost vozidel jako obsah vyplněné plochy. Síť umožní získat přibližný výsledek.

Bez ohledu na způsob řešení je pro přiznání bodů rozhodující konečný výsledek:

2 body, je-li výsledek v intervalu $\langle 13{,}0\ \mathrm{m}, 13{,}4\ \mathrm{m}\rangle$,
1 bod, je li výsledek v intervalu $\langle 12{,}5\ \mathrm{m}, 13{,}9\ \mathrm{m}\rangle$, **2 body**



Obr. R1

Přesný výsledek získáme výpočtem. Z rovnic protínajících se přímek

$$\{v\} = 1{,}5(\{t\} - 2) = 1{,}5\{t\} - 3\,,$$

$$\{v\} = 4 - 0{,}8(\{t\} - 4) = 7{,}2 - 0{,}8\{t\}\,,$$

vypočteme odpovídající čas

$$t = (102/23)\ \mathrm{s} \doteq 4{,}43\ \mathrm{s}.$$

V tomto čase je společná rychlost

$$v = [1{,}5(102/23 - 2)]\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = (84/23)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 3{,}65\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Tyto souřadnice času a rychlosti nám umožňují přesně určit obsah vyplněné plochy. Libovolným poskládáním dostaneme

$$d_{\max} \doteq 13{,}22\ \mathrm{m}.$$

2. a) Z obecných rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu nebo pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení

$$v = at\,, \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{plyne} \quad t = \frac{2s}{v}\,, \quad a = \frac{v^2}{2s}\,.$$

Jelikož konečná rychlost při sjezdu a počáteční rychlost při nájezdu jsou stejné, je při poloviční dráze nájezdu též poloviční čas:

$$t_1 = \frac{2}{3}T = 8\ \mathrm{s}\,, \qquad t_2 = \frac{1}{3}T = 4\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

b) Lyžař se pohybuje dolů se zrychlením o velikosti a_1 a nahoru se zrychlením o velikosti a_2. Při poloviční dráze nahoru je velikost zrychlení dvojnásobná:

$$a_2 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 2a_1 = 2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,,$$

$$f = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 0{,}12\,.$$

3 body

c) K sestrojení grafu (obr. R2 – plná čára) musíme určit rychlost v v nejnižším bodě:

$$v = a_1t_1 = g(\sin\alpha - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha)t_1 = \frac{2}{3}gt_1\sin\alpha = 17{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

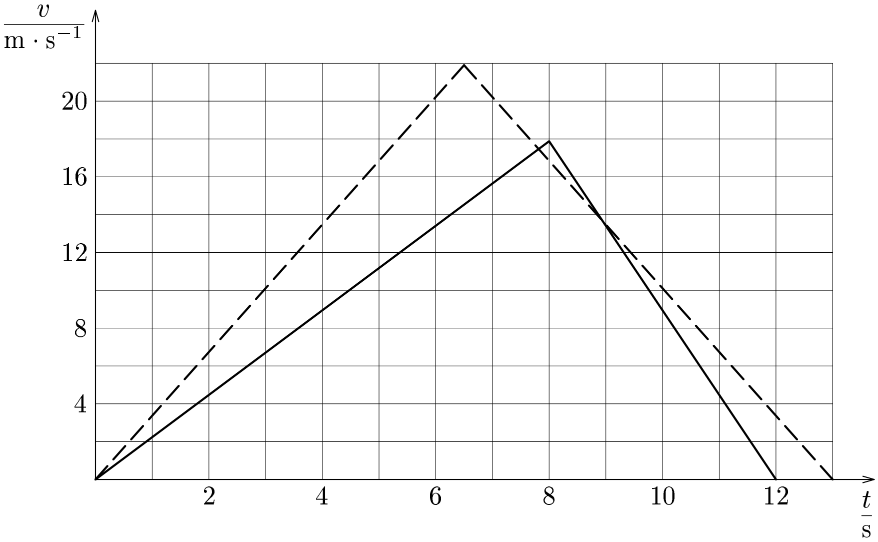
d) Označme hodnoty veličin pro pohyb bez tření čárkou. K sestrojení grafu (obr. R2 — čárkovaně) je třeba určit v', t_1' a t_2', přičemž $t_2' = t_1'$. Platí

$$a' = g\sin\alpha\,, \quad s = \frac{1}{2}a't_1'^2 = \frac{1}{2}a_1t_1^2\,,$$

$$t_1' = t_1\sqrt{\frac{a_1}{a'}} = t_1\sqrt{\frac{\frac{2}{3}g\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = t_1\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 6{,}5\ \mathrm{s}\,,$$

$$v' = a't_1' = g\sin\alpha t_1\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 21{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body



Obr. R2

3. a) Hledaná rychlost je $v_1 = g\dfrac{\Delta t}{2} = 7{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

Pro maximální výšku platí

$$h_\mathrm{m} = h_1 + \frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = h_1 + \frac{1}{8}g(\Delta t)^2 = 11{,}7\ \mathrm{m}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mgh_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$v_0 = \sqrt{2gh_\mathrm{m}} = \sqrt{2gh_1 + \frac{1}{4}g^2(\Delta t)^2}\,. \tag{3}$$

Číselně vychází $v_0 \doteq 15{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ **3 body**

c) Z rovnice (3) a z rovnice $v_0 = g\dfrac{t_\mathrm{c}}{2}$ plyne

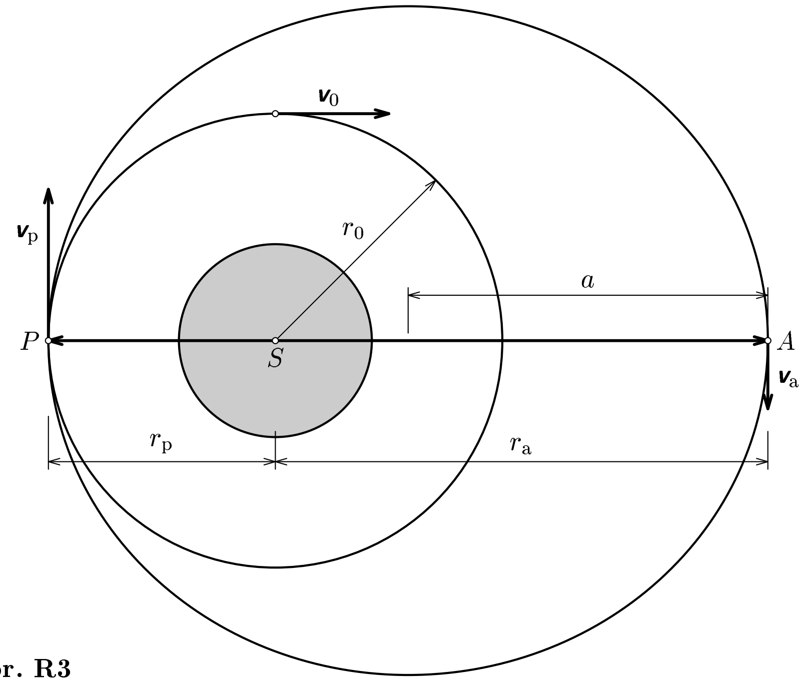
$$t_\mathrm{c} = \sqrt{\frac{8h_1}{g} + (\Delta t)^2} \doteq 3{,}1\ \mathrm{s}\,.$$ **3 body**

4. a) Při oběhu družice o hmotnosti m je dostředivou silou gravitační síla. Proto platí

$$m\frac{4\pi^2}{T_0^2}r_0 = \varkappa\frac{Mm}{r_0^2}, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{\varkappa M}} \doteq 18\,300\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{h}\ 5\ \mathrm{min}\,.$$

2 body

b)



Obr. R3

2 body

c) Aby subdružice přešla z kruhové trajektorie na eliptickou a začala se vzdalovat od Země, musí svoji rychlost zvětšit, tedy $v_\mathrm{p} > v_0$. Při pohybu k apogeu se rychlost v důsledku 2. Keplerova zákona zmenšuje, tedy $v_\mathrm{a} < v_\mathrm{p}$. Kdybychom chtěli v apogeu přejít na kruhovou trajektorii o poloměru r_p, musíme rychlost subdružice zvětšit na v_0' $(v_0' > v_\mathrm{a})$. Jelikož pro kruhové rychlosti platí $v_0' < v_0$, je též $v_\mathrm{a} < v_0$. Celkově tedy platí

$$v_\mathrm{a} < v_0 < v_\mathrm{p}\,.$$

2 body

d) Z 3. Keplerova zákona plyne

$$\frac{(2T_0)^2}{T_0^2} = \frac{a^3}{r_0^3}\,, \qquad a = r_0\sqrt[3]{4} \doteq 1{,}587 r_0 \doteq 23\,800\ \mathrm{km}\,.$$

Podle obr. R3 je

$$r_\mathrm{p} = r_0 = 15\,000\ \mathrm{km}\,, \quad r_\mathrm{a} = 2a - r_\mathrm{p} = r_0(2\sqrt[3]{4} - 1) \doteq 2{,}17 r_0 \doteq 32\,600\ \mathrm{km}\,.$$

3 body

e) Plocha opsaná průvodičem subdružice za malý časový interval Δt po průchodu perigeem je podle 2. Keplerova zákona stejná jako plocha opsaná za stejný časový interval po průchodu apogeem.

$$\Delta S = \frac{1}{2} v_\mathrm{p} \Delta t \cdot r_\mathrm{p} = \frac{1}{2} v_\mathrm{a} \Delta t \cdot r_\mathrm{a}\,.$$

Z toho plyne

$$\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = 2\sqrt[3]{4} - 1 \doteq 2{,}17\,.$$

1 bod