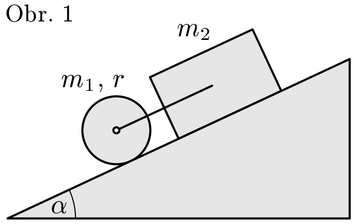
Úlohy 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Na nakloněné rovině se sklonem α je umístěna spojená soustava válce a kvádru. Válec má hmotnost m_1, poloměr r a moment setrvačnosti vůči rotační ose $J = \frac{1}{2}m_1r^2$. Osa válce je pomocí dvou tenkých tyčí spojena s kvádrem o hmotnosti m_2 (obr. 1). Tyče jsou rovnoběžné s nakloněnou rovinou, osa válce je v nich volně otáčivá. Součinitel smykového tření mezi povrchy kvádru či válce a nakloněnou rovinou je f. (Obě tělesa jsou ze stejného materiálu.)

Obr. 1



a) Stanovte horní mez $f_{\max}$ součinitele smykového tření, při kterém dojde po uvolnění soustavy k jejímu pohybu po nakloněné rovině.

b) Vypočítejte zrychlení soustavy a sílu F přenášenou tyčemi za předpokladu, že soustava sjíždí po nakloněné rovině a válec se pohybuje bez prokluzování.

c) Určete dolní mez $f_{\min}$ smykového tření, při kterém nedochází k prokluzování válce.

Úlohy a), c) řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty: $\alpha = 25°$, $m_1 = 2{,}2$ kg, $m_2 = 5{,}0$ kg, $g = 9{,}8$ m·s^{-2}. V úloze b) počítejte ještě s hodnotou $f = 0{,}27$.

2. V elektrickém obvodu je zařazen generátor harmonického střídavého napětí o frekvenci f. K němu je sériově zapojen kondenzátor o kapacitě C a cívka, jejíž indukčnost se dá měnit pohybem jádra v intervalu $\langle 0{,}05\ \mathrm{H}, 0{,}4\ \mathrm{H}\rangle$. Odpor (rezistanci) cívky lze zanedbat. Efektivní hodnota svorkového napětí nezatíženého generátoru je U; generátor má vnitřní odpor R_i.

a) Určete indukčnost L_1 cívky při které nastane rezonance a obvodem bude procházet maximální proud.

b) Určete, jaké napětí $U_{L\mathrm{rez}}$ bude při rezonanci na cívce.

c) Určete indukčnost L_2, při které bude na cívce maximální efektivní hodnota napětí $U_{L\max}$.

d) Určete $U_{L\max}$.

e) Nakreslete grafy závislosti efektivní hodnoty napětí U_L na cívce a proudu I, který prochází obvodem, na indukčnosti cívky L.

f) Jak se změní výsledek v části b), jestliže vinutí cívky má odpor R'?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty: $U = 2{,}0$ V, $f = 200$ Hz, $R_\mathrm{i} = 50\ \Omega$, $C = 4{,}0\ \mu$F, $R' = 2{,}5\ \Omega$.

3. Horkovzdušný balon má objem $V = 2\,200\ \mathrm{m}^3$. Hmotnost pláště a koše s posádkou je $m = 450$ kg. Okolní vzduch má teplotu $t = 27{,}0\ °\mathrm{C}$, atmosférický tlak při zemi je $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Teplotu vzduchu v balonu budeme velmi pomalu zvyšovat.

a) Jaká musí být teplota t_{i0} vzduchu uvnitř balonu, aby začal stoupat?

b) Dokažte, že pokud se teplota a složení atmosféry s výškou nemění, závisí atmosférický tlak na výšce h nad zemí podle vztahu

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}\,,$$

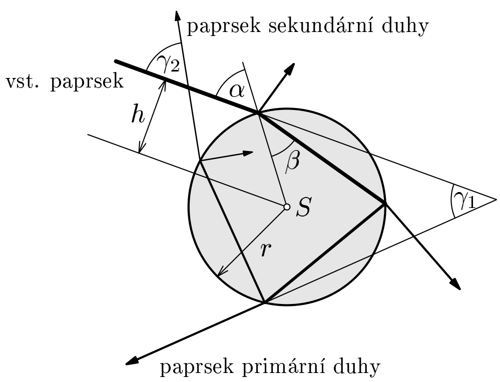
kde M je molární hmotnost vzduchu, R molární plynová konstanta, T termodynamická teplota a g tíhové zrychlení, jehož velikost považujte v oblasti atmosféry za konstantní.

c) Za tohoto předpokladu určete, jak závisí výška balonu nad zemí na teplotě t_i vzduchu uvnitř balonu, a sestrojte graf této závislosti.

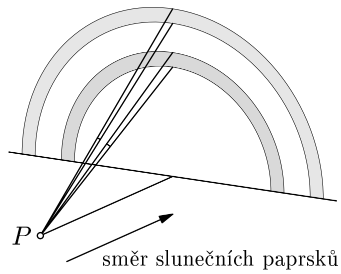
Znečištění vzduchu uvnitř balonu spalinami zanedbejte, tlak vzduchu uvnitř balonu je prakticky stejný jako v okolní atmosféře.

$$M = 28{,}96\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}},\ R = 8{,}315\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}},\ g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

4. Mezi jeden z často pozorovaných úkazů v atmosféře patří duha. Základní princip duhy lze vysvětlit na základě úvah o průchodu světla homogenní kulovou kapkou. Paprsek, který dopadá na vodní kapku, se na jejím povrchu částečně odráží. Z větší části proniká dovnitř. Uvnitř kapky se mnohonásobně odráží od povrchu kapky a při každém odrazu se i částečně láme a vystupuje ven. Pro vznik duhy mají význam paprsky vystupující z kapky při druhém a třetím vnitřním odrazu (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

a) Vyjádřete úhly α, β znázorněné na obr. 2 pomocí *záměrného parametru* $H = h/r$ a relativního indexu lomu n.

b) Vyjádřete duhové úhly γ_1, γ_2 pomocí úhlů α, β.

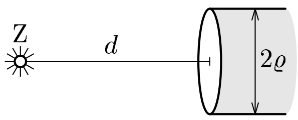
c) Určete funkce $\gamma_1 = \gamma_1(H)$, $\gamma_2 = \gamma_2(H)$ a sestrojte jejich grafy pro světlo červené barvy. ($n_\mathrm{f} = 1{,}343$, $n_\mathrm{č} = 1{,}330$.)

d) Určete obecně, pro která H dosahují funkce $\gamma_1(H)$ a $\gamma_2(H)$ extrémů $\gamma_{1\max}$, $\gamma_{2\min}$ a jaká je jejich hodnota.

Návod: při řešení použijte vztah $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $|x| < 1$.

e) Zdůvodněte, proč zorný úhel poloměru kružnice určité barvy primární duhy je $\gamma_{1\max}$, sekundární duhy $\gamma_{2\min}$. Určete pořadí barev v primární a sekundární duze a jejich úhlové šířky (obr. 3).

5. Malý radioaktivní zářič obsahující radioaktivní nuklid $^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ je umístěn ve vzdálenosti $d = 5{,}0$ cm od kruhového vstupního okénka scintilačního detektoru na jeho ose souměrnosti (obr. 4). Okénko má poloměr $\varrho = 15$ mm a za dobu $\tau = 100$ s zachytí $N_1 = 1450$ částic β vyslaných zářičem.



Obr. 4

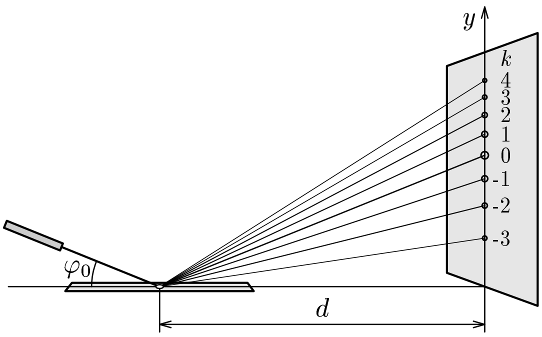
a) Jaká je celková aktivita zářiče?

b) Kolik atomů $^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ zářič obsahuje a jaká je jejich celková hmotnost, jestliže relativní atomová hmotnost nuklidu je $A_r = 89{,}9$ a poločas rozpadu $T = 28$ roků?

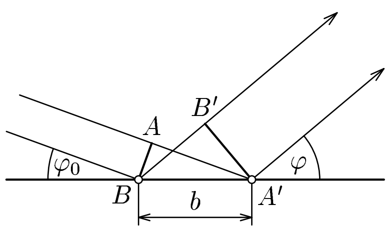
6. *Praktická úloha:* **Měření vlnové délky světla laseru**

Teorie: Laserový paprsek si můžeme představit jako zhruba 1 mm široký tok rovinných vlnoploch koherentního monochromatického záření. Dopadá-li šikmo s malou odchylkou φ_0 na vodorovné ocelové měřítko s milimetrovou stupnicí, zasáhne větší počet dílků měřítka. Pravidelně uspořádané lesklé rovinné mezery mezi ryskami se chovají jako optická mřížka na odraz, mřížková konstanta b je rovna vzdálenosti středů sousedních rysek, tedy 1 mm. Na svislém stínítku postaveném nedaleko měřítka vznikne difrakční jev tvořený svislou řadou svítících bodů v rovině dopadu laserového paprsku (obr. 5).

Obr. 5



Obr. 6



Interferenční maxima vznikají ve směrech, ve kterých dráhový rozdíl δ elementárních vlnění vycházejících ze sousedních odrazných plošek je roven celistvému násobku vlnové délky světla. Odchylky světelného paprsku, pro které je to splněno, určíme na základě obr. 6. Platí

$$\delta = |AA'| - |BB'| = b\cos\varphi_0 - b\cos\varphi = k\lambda\,, \quad \lambda = \frac{b(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{k}\,.$$

Celé číslo k se nazývá *řád* interferenčního maxima.

Interferenční maximum se nachází na stínítku ve výši $y = d\,\mathrm{tg}\,\varphi$, kde d je vzdálenost stínítka od bodu dopadu laserového paprsku. Z toho určíme $\varphi = \mathrm{arctg}(y/d)$.
Nejjasnější je interferenční maximum nultého řádu, které leží ve směru s odchylkou φ_0 ve výšce $y_0 = d\,\mathrm{tg}\,\varphi_0$. Zde je dráhový rozdíl všech elementárních vlnění nulový.

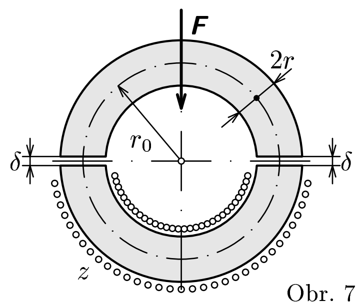
Úkol: Sestavte pokus podle obr. 5 a proměřte parametry difrakčního jevu. Z nich určete vlnovou délku světla použitého laseru. Vzdálenost d stínítka od bodu odrazu volte alespoň 2 m, úhel φ_0 by neměl překročit 5°.

Pomůcky: He-Ne laser nebo laserové ukazovátko, stojan pro jeho upevnění v šikmé poloze, ocelové měřítko (může být použita milimetrová stupnice posuvného měřidla s noniem), stínítko, délková měřidla

Upozornění: Měření smí být provedeno jen s laserem malého výkonu, například s laserovým ukazovátkem. I v takovém případě je nutno vyvarovat se přímého pohledu do laserového paprsku!

Poznámka: Některá laserová ukazovátka vyzařují širší světelný svazek, který se soustřeďuje až ve vzdálenosti několika metrů. V takovém případě je vhodné doplnit ukazovátko spojkou o malé optické mohutnosti, která stopu na stínítku zaostří.

7. Buzený magnetický obvod je zhotoven z železného prstence ve tvaru anuloidu o středovém poloměru $r_0 = 50{,}0$ mm, jehož kruhový průřez má poloměr $r = 10{,}0$ mm. Anuloid je v polovině přerušen vzduchovou mezerou o tloušťce $\delta = 2{,}00$ mm. Dolní část tvoří jádro cívky se $z = 200$ závity, horní část je kotva (Obr. 7). Závislost magnetické indukce na intenzitě magnetického pole je popsána v MFCh tabulkách (tab. 53 ve vydání z r. 1988).



Obr. 7

a) Vypočtěte proud I, který v magnetickém obvodu vyvolá magnetické pole o indukci $B = 0{,}750$ T. Jaká indukce bude ve vzduchové mezeře?

b) Vypočtěte proud I_1 pro případ $\delta_1 = \delta/3$ a proud I_0 pro případ nulové vzduchové mezery ($\delta_0 = 0$) při požadavku stejné magnetické indukce jako v případě a).

c) Vypočtěte velikosti sil $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_0$, kterými je kotva přitahována k jádru v uvedených případech.