Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Randa (1, 2, 3), M. Jarešová (4), K. Rauner (5), I. Čáp (6),
L. Zdeborová (7). Konečná úprava: P. Šedivý a M. Jarešová

1. a) Jedná se o vrh šikmo vzhůru s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a elevačním úhlem β. Vztažnou soustavu Oxy zvolíme podle obr. R1. Platí:

$$v_x = v_0 \cos\beta, \quad v_y = v_0 \sin\beta - gt, \quad x = v_0 t \cos\beta, \quad y = v_0 t \sin\beta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Z toho známým způsobem určíme dobu letu kuliček T, souřadnice bodů dopadu D_1, D_2 a výšku vrhů H:

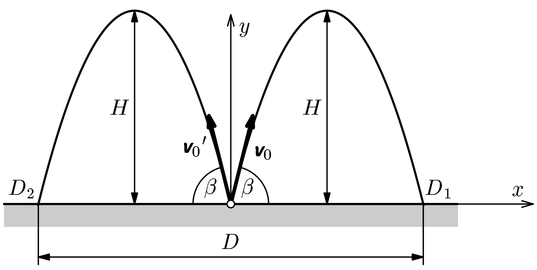
$$T = \frac{2v_0 \sin\beta}{g}, \quad D_{1,2} = \pm\frac{2v_0^2 \sin\beta\cos\beta}{g} = \pm\frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}, \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\beta}{2g}.$$

Dle zadání má platit

$$D = D_1 - D_2 = \frac{4{v_0}^2 \sin\beta\cos\beta}{g} = 2H = \frac{2{v_0}^2 \sin^2\beta}{2g}.$$

Z toho $\operatorname{tg}\beta = 4$, $\beta = 76°$.

Pro dané hodnoty $T = 0{,}99$ s, $D_{1,2} = 1{,}20$ m, $D = 2{,}40$ m.



Obr. R1 **3 body**

b) Má-li být D největší, pak $\sin 2\beta = 1$, tj. $\beta = 45°$. Pak $D = \dfrac{2{v_0}^2}{g}$.

Pro dané hodnoty $D = 5{,}10$ m. **1 bod**

c) Vztažnou soustavu Oxy zvolíme podle obr. R2, kde osa x je orientovaná podél nakloněné roviny dolů, osa y míří vzhůru kolmo k nakloněné rovině.

Pro kuličku vrženou ve směru dolů platí:

$$a_x = g\sin\alpha, \quad v_x = v_0 \cos\beta + gt\sin\alpha, \quad x = v_0 t\cos\beta + \frac{1}{2}gt^2 \sin\alpha,$$

$$a_y = -g\cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\beta - gt\cos\alpha, \quad y = v_0 t\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2 \cos\alpha.$$

Druhá kulička se liší znaménkem u v_0 ve vztazích pro v_x, x:

$$v_x = -v_0 \cos\beta + gt\sin\alpha, \quad x = -v_0 t\cos\beta + \frac{1}{2}gt^2 \sin\alpha.$$

V maximální vzdálenosti od roviny je $v_y = 0$, tj. $0 = v_0 \sin\beta - gT_1 \cos\alpha$, kde T_1 je doba stoupání. Potom

$$T_1 = \frac{v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha} \text{ (stejná pro obě kuličky).}$$

Doba letu kuliček je $T = 2T_1 = \dfrac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$ (shodná pro obě kuličky). Maximální vzdálenost kuliček od roviny (měřená ve směru osy y) je stejná pro obě tělesa. Platí

$$H = y(T_1) = v_0 \sin\beta \frac{v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{{v_0}^2 \sin^2\beta}{g^2 \cos^2\alpha} \cos\alpha = \frac{{v_0}^2 \sin^2\beta}{2g\cos\alpha}.$$

Souřadnice místa dopadu

$$D_{1,2} = \frac{2{v_0}^2 \sin\beta}{g\cos\alpha}(\pm\cos\beta + \operatorname{tg}\alpha \sin\beta).$$

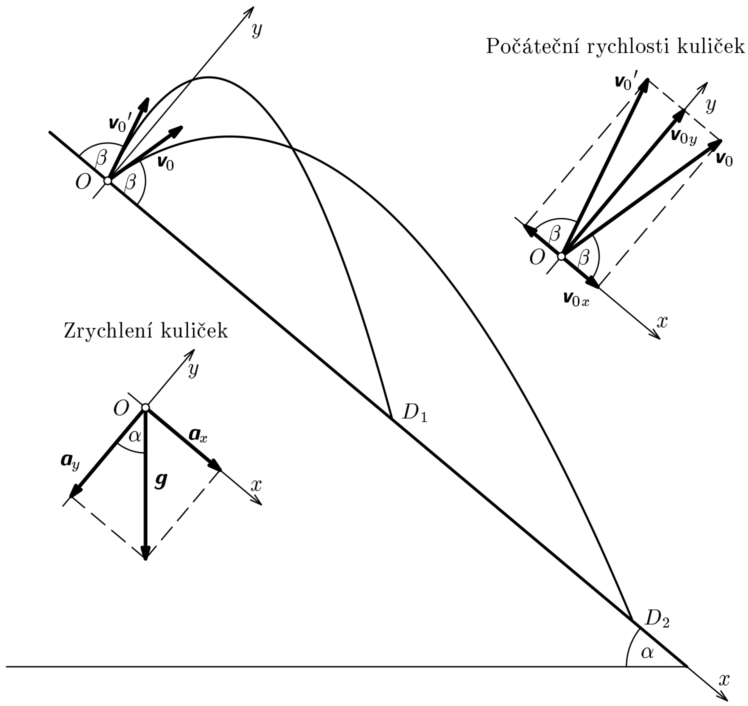
Vzdálenost obou míst

$$D = D_1 - D_2 = \frac{4{v_0}^2 \sin\beta\cos\beta}{g\cos\alpha} = \frac{2{v_0}^2 \sin 2\beta}{g\cos\alpha}.$$

Ze zadání plyne

$$\frac{4{v_0}^2 \sin\beta\cos\beta}{g\cos\alpha} = \frac{2{v_0}^2 \sin^2\beta}{2g\cos\alpha},$$ odkud jako v a) $\operatorname{tg}\beta = 4$, tj. $\beta = 76°$.

Pro dané hodnoty $T = 1{,}29$ s, $D_1 = 6{,}82$ m, $D_2 = 3{,}69$ m, $D = 3{,}13$ m. **4 body**



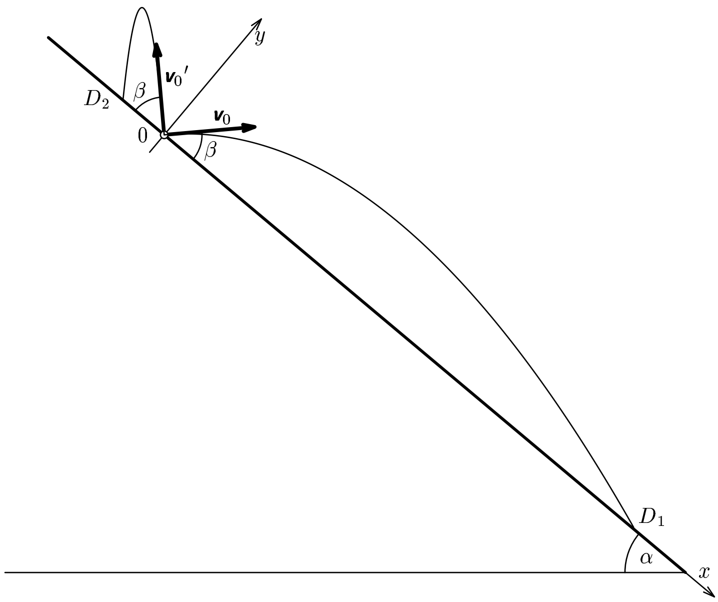
Obr. R2

d) Maximální vzdálenost míst dopadu bude při $\sin 2\beta = 1$, tj. $\beta = 45°$ (obr. R3). Pro dané hodnoty $D_1 = 6{,}12$ m, $D_2 = -0{,}54$ m, $D = 6{,}66$ m. **1 bod**

e) Pro $\alpha = 0°$ je

$$T = \frac{2v_0 \sin\beta}{g}, \quad H = \frac{{v_0}^2 \sin^2\beta}{2g}, \quad D_{1,2} = \pm\frac{{v_0}^2 \sin 2\beta}{g}, \quad D = \frac{2{v_0}^2 \sin 2\beta}{g},$$

což jsou vztahy z úloh a), b). **1 bod**



Obr. R3

2. Po přestřižení nitě budou na soustavu válců působit jen vnější tíhové síly a vnitřní síly zprostředkované pružinou. Těžiště soustavy bude padat volným pádem. Děj nejsnáze popíšeme ve vztažné soustavě spojené s těžištěm, tedy „v beztížném stavu“.

a) V počátečním okamžiku je pružina napnuta silou o velikosti mg a prodloužena o $\Delta l = mg/k = 0{,}0784$ m. Aby se válce dostaly do rovnovážných poloh, kdy bude pružina nezatížená, musí se posunout větší válec o Δl_1 a menší o Δl_2, což jsou také amplitudy výchylky kmitů, které po odstřižení začnou probíhat. Platí

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l = \frac{mg}{k}\,, \qquad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m}{M}\,.$$

Z toho

$$\Delta l_1 = y_{1\mathrm{m}} = \Delta l \frac{m}{M+m} = \frac{m^2 g}{k(M+m)} = 0{,}0224 \text{ m}\,,$$

$$\Delta l_2 = y_{2\mathrm{m}} = \Delta l \frac{M}{M+m} = \frac{mMg}{k(M+m)} = 0{,}056 \text{ m}\,.$$

Jestliže válec o hmotnosti M kmitá s amplitudou $y_{1\mathrm{m}}$ a v krajní poloze na něj působí síla

$$F_\mathrm{m} = mg = M\omega^2 y_{1\mathrm{m}} = \omega^2 \frac{Mm^2 g}{k(M+m)}\,,$$

pak

$$\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \approx 13{,}2 \text{ s}^{-1}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \approx 0{,}475 \text{ s}$$

4 body

b) Ve vztažné soustavě spojené se Zemí bude pohyb válců složen z kmitání vyšetřeného v úkolu a) a volného pádu. Pružina se bude poprvé nacházet v nezatíženém stavu v čase

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \approx 0{,}119 \text{ s}\,.$$

Horní válec bude mít rychlost o velikosti

$$v_1 = gt_1 + \omega y_{1\mathrm{m}} \approx (1{,}164 + 0{,}296) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 1{,}46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

Dolní válec bude mít rychlost o velikosti

$$v_2 = gt_1 - \omega y_{2\mathrm{m}} \approx (1{,}164 - 0{,}741) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 0{,}42 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

3 body

c) Vzdálenost válců bude poprvé minimální v čase

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \approx 0{,}237 \text{ s}\,.$$

Dolní podstava horního válce bude ve výšce

$$h_1 = H - \frac{1}{2}gt_2^2 - 2\Delta l_1 \approx (2 - 0{,}276 - 2\cdot 0{,}0224) \text{ m} \approx 1{,}68 \text{ m}\,.$$

Horní podstava dolního válce bude ve výšce

$$h_2 = h_1 - (l_0 - \Delta l) \approx 1{,}68 - (0{,}20 - 0{,}0784) \text{ m} \approx 1{,}56 \text{ m}\,.$$

3 body

3. a) V celé nádobě je stejný tlak a teplota. Ze stavové rovnice

$$\frac{pV}{T} = nR$$

plyne, že látková množství vodní páry a vzduchu jsou ve stejném poměru jako objemy obou částí nádoby. Při zahřívání nádoby dochází nejprve k vypařování vody a látkové množství páry se zvětšuje, zatímco látkové množství vzduchu se nemění. Proto se objem části s vodou a vodní párou zvětšuje. Jedná se tedy o tu část nádoby, která původně zabírala jednu třetinu celého objemu. Po odpaření vody se poměr látkových množství obou plynů nemění a píst se přestane pohybovat.

4 body

b) Označme V objem nádoby, m_p a m_v původní hmotnosti páry a vody, n_p a n_v jejich látková množství, n látkové množství vzduchu. Platí

$$\frac{n_\mathrm{p}}{n} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{n_\mathrm{p} + n_\mathrm{v}}{n} = \frac{2}{1}.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{n_\mathrm{p} + n_\mathrm{v}}{n_\mathrm{p}} = 4, \qquad \frac{n_\mathrm{v}}{n_\mathrm{p}} = \frac{m_\mathrm{v}}{m_\mathrm{p}} = 3.$$

3 body

c) Označme m'_v hmotnost odpařené vody a n'_v její látkové množství. Obdobně jako v b):

$$\frac{n_\mathrm{p}}{n} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{n_\mathrm{p} + n'_\mathrm{v}}{n} = 1.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{n_\mathrm{p} + n'_\mathrm{v}}{n_\mathrm{p}} = 2, \qquad n'_\mathrm{v} = n_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad m'_\mathrm{v} = m_\mathrm{p}.$$

Hmotnosti vody a vodní páry jsou při průchodu pístu středem nádoby stejné, neboť

$$\frac{m_\mathrm{v} - m'_\mathrm{v}}{m_\mathrm{p} + m'_\mathrm{v}} = \frac{2m_\mathrm{p}}{2m_\mathrm{p}} = 1.$$

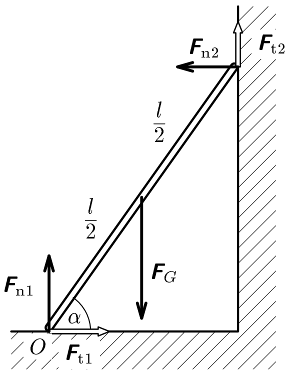
3 body

4. a) Na žebřík, který je v rovnováze, působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, reakce podlahy s normálovou složku $\boldsymbol{F}_{n1}$ a tečnou složku $\boldsymbol{F}_{t1}$ a reakce stěny s normálovou složku $\boldsymbol{F}_{n2}$ a tečnou složku $\boldsymbol{F}_{t2}$ (obr. R5). Tečné složky reakcí jsou třecí síly, které brání sklouznutí žebříku. Předpokládáme tedy, že mají směry vyznačené na obrázku a splňují podmínky

$$F_{t1} \leq f_1 \cdot F_{n1}\,, \quad F_{t2} \leq f_2 \cdot F_{n2}\,.$$

Aby nastala rovnováha, musí se vodorovné i svislé složky sil co do účinku rušit:

$$F_{t2} + F_{n1} = F_G\,, \qquad F_{t1} = F_{n2}\,. \qquad (1)$$



Obr. R5

Kromě toho se musí v účinku také rušit otáčivé momenty vzhledem k libovolnému bodu. Zvolíme-li za tento bod dolní konec žebříku O, musí platit

$$F_{n2} \cdot l \sin\alpha + F_{t2} \cdot l \cos\alpha - F_G \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha = 0\,. \qquad (2)$$

V mezním případě, kdy $\alpha = \alpha_{\min}$, platí

$$F_{t1} = f_1 \cdot F_{n1}\,, \quad F_{t2} = f_2 \cdot F_{n2}\,. \qquad (3)$$

Řešením soustavy rovnic (1) až (3) dostaneme

$$F_{n2} = f_1 \cdot F_{n1}\,, \quad F_{t2} = f_1 f_2 \cdot F_{n1}\,, \quad F_G = F_{n1} + f_1 f_2 \cdot F_{n1}\,,$$

$$f_1 F_{n1} l \sin\alpha_{\min} + f_1 f_2 F_{n1} l \cos\alpha_{\min} - (F_{n1} + f_1 f_2 F_{n1}) \frac{l}{2} \cos\alpha_{\min} = 0\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{1 - f_1 f_2}{2 f_1}\,, \qquad \alpha_{\min} = 58^\circ 16'. \qquad (4)$$

3 body

b) Do vztahu (4) dosadíme $f_2 = 0$; pak

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2f_1}\,. \quad \text{Pro dané hodnoty} \quad \alpha_{\min} = 59^\circ 2'\,.$$

Z výsledku je vidět, že tření na zdi má pro úhel α zanedbatelný význam.

2 body

c) Dosadíme-li do vztahu (4) za $f_1 = 0$, dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha = \infty\,, \quad \text{tj.} \quad \alpha_{\min} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Z toho vyplývá, že samotné tření na zdi žebřík neudrží.

2 body

d) Vyjdeme z obr. R6. Obdobně jako v úloze a) napíšeme podmínky rovnováhy pro oba směry a otáčivý moment. V mezním případě platí

$$f_2 \cdot \mathrm{F}_{\mathrm{n}2} + F_{\mathrm{n}1} = F_{G1} + F_G, \quad f_1 \cdot F_{\mathrm{n}1} = F_{\mathrm{n}2},$$

$$F_{\mathrm{n}2} l \sin\alpha + f_2 F_{\mathrm{n}2} l \cos\alpha - F_G \frac{l}{2}\cos\alpha - F_{G1}\cdot d\cos\alpha = 0\,, \tag{5}$$

Po úpravě dostáváme

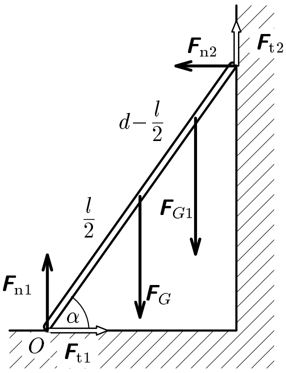
$$2F_{\mathrm{n}2}(\sin\alpha + f_2\cos\alpha) - mg\cos\alpha - 2m_1 g\frac{d}{l}\cos\alpha = 0,$$

odkud

$$d = \left(\frac{F_{\mathrm{n}2}(\mathrm{tg}\,\alpha + f_2)}{m_1 g} - \frac{m}{2m_1}\right) l.$$

Z rovnic pro podmínky rovnováhy v obou směrech vyjádříme

$$F_{\mathrm{n}2} = \frac{f_1(m_1+m)g}{1+f_1 f_2}\,.$$



Obr. R6

Potom

$$d = \left(\frac{f_1(m+m_1)}{m_1(1+f_1 f_2)}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{f_1 f_2(m+m_1)}{(1+f_1 f_2)m_1} - \frac{m}{2m_1}\right) l.$$

Pro dané hodnoty $d = 0{,}54l = 2{,}2$ m.

3 body

e) Má-li člověk bezpečně vylézt až nahoru, je třeba určit úhel α pro případ $d = l$, tj. určit úhel α nejlépe ze vztahu (5), kam za d dosadíme l. Po úpravě

$$2F_{\mathrm{n}2}\cdot\sin\alpha = -2f_2\cdot F_{\mathrm{n}2}\cos\alpha + F_G\cos\alpha + 2F_{G1}\cos\alpha\,,$$

odkud po dosazení za $F_{\mathrm{n}2}$ dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{(m+2m_1)(1+f_1 f_2)}{2f_1(m+m_1)} - f_2.$$

Pro dané hodnoty je $\alpha'_{\mathrm{min}} = 72°3'$.

2 body

5. a) Voltampérová charakteristika z obr. 6 se dá pro $U_\mathrm{d} > U_\mathrm{z0}$ popsat vztahem

$$I_\mathrm{d} = \frac{U_\mathrm{d} - U_\mathrm{z0}}{R_\mathrm{d}} \,. \tag{1}$$

Musí proto platit

$$P_\mathrm{m} = U_\mathrm{d\,max} \frac{U_\mathrm{d\,max} - U_\mathrm{z0}}{R_\mathrm{d}} \,, \quad \Rightarrow \quad U^2_\mathrm{d\,max} - U_\mathrm{z0} U_\mathrm{d\,max} - P_\mathrm{m} R_\mathrm{d} = 0 \,.$$

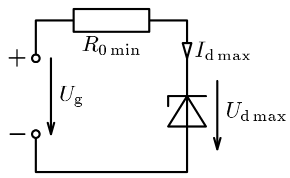
Úloze vyhovuje kladný kořen

$$U_\mathrm{d\,max} = \frac{U_\mathrm{z0} + \sqrt{U^2_\mathrm{z0} + 4 P_\mathrm{m} R_\mathrm{d}}}{2} = 10{,}92\ \mathrm{V} \,.$$

Protože i pro maximální hodnoty napětí a proudu diody musí platit vztah (1), je

$$I_\mathrm{d\,max} = \frac{\sqrt{U^2_\mathrm{z0} + 4 P_\mathrm{m} R_\mathrm{d}} - U_\mathrm{z0}}{2 R_\mathrm{d}} = 0{,}458\ \mathrm{A} \,.$$

2 body

b) 

Obr. R7

Nejnepříznivějšímu případu z hlediska výkonového zatížení Zenerovy diody odpovídá zapojení podle obr. R7. Platí

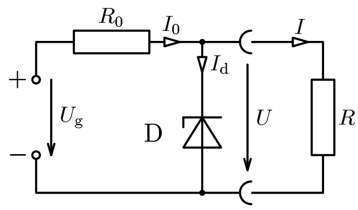
$$R_{0\,\mathrm{min}} = \frac{U_\mathrm{g2} - U_\mathrm{d\,max}}{I_\mathrm{d\,max}} = 19{,}8\ \Omega \,.$$

1 bod

c) Vyjdeme z obr. R8. V nejnepříznivějším případě $U_\mathrm{g} = U_\mathrm{g1}$ při zapojení minimální hodnoty zatěžovacího odporu R_min klesne proud I_d na nulu. Musí platit

$$U = U_\mathrm{z0} \,, \quad I = I_0 = \frac{U_\mathrm{g1} - U_\mathrm{z0}}{R_0} = \frac{U_\mathrm{z0}}{R_\mathrm{min}} \,,$$

$$R_\mathrm{min} = \frac{R_0 U_\mathrm{z0}}{U_\mathrm{g1} - U_\mathrm{z0}} = 100\ \Omega \,.$$



Obr. R8

2 body

d) Řešením soustavy rovnic

$$U_\mathrm{g} - U = R_0 I_0 \,, \qquad I_0 = I_\mathrm{d} + I \,, \qquad U = RI = U_\mathrm{z0} + R_\mathrm{d} I_\mathrm{d}$$

dojdeme ke vztahu

$$U = \frac{U_\mathrm{z0} + U_\mathrm{g} \dfrac{R_\mathrm{d}}{R_0}}{1 + \dfrac{R_\mathrm{d}}{R_0} + \dfrac{R_\mathrm{d}}{R}} \,. \tag{2}$$

Po dosazení mezních hodnot za U_g dostaneme $U_1 = 10{,}10$ V, $U_2 = 10{,}29$ V.

2 body

e) Ze vztahu (2) plyne

$$S = \frac{\Delta U_\mathrm{g}}{U_\mathrm{g}} \cdot \frac{U}{\Delta U} = \frac{\Delta U_\mathrm{g}}{U_\mathrm{g}} \cdot \frac{\dfrac{U_\mathrm{z0} + U_\mathrm{g}\dfrac{R_\mathrm{d}}{R_0}}{1 + \dfrac{R_\mathrm{d}}{R_0} + \dfrac{R_\mathrm{d}}{R}}}{\dfrac{\Delta U_\mathrm{g}\dfrac{R_\mathrm{d}}{R_0}}{1 + \dfrac{R_\mathrm{d}}{R_0} + \dfrac{R_\mathrm{d}}{R}}} = 1 + \frac{R_0 U_\mathrm{z0}}{R_\mathrm{d} U_\mathrm{g}}\,.$$

Pro $U_\mathrm{g} = 18$ V dostaneme $S = 14{,}9$. **3 body**

7. a) Pohybová složka tíhové síly musí překonat statické tření:

$$F_G \sin\alpha > f_\mathrm{s} F_G \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha > f_\mathrm{s}\,,$$

což je pro dané hodnoty splněno. **1 bod**

b) Tlaková složka tíhové síly je v rovnováze s kolmou složkou reakce nakloněné roviny. Ve směru nakloněné roviny působí na kvádr pohybová složka tíhové síly, síla pružiny a dynamické tření. Rovnováha nastane, když

$$F_G \sin\alpha - k x_0 - f_\mathrm{d} F_G \cos\alpha = 0\,, \quad x_0 = \frac{Mg}{k}(\sin\alpha - f_\mathrm{d}\cos\alpha)\,.$$

Pro dané hodnoty $x_0 = 0{,}14$ m. **1 bod**

c) Kvádr se zastaví, když úbytek potenciální energie tíhové je roven součtu potenciální elastické energie pružiny a práce spotřebované dynamickým třením:

$$F_G \sin\alpha \cdot x_\mathrm{max} = \frac{1}{2} k x_\mathrm{max}^2 + f_\mathrm{d} F_G \cos\alpha \cdot x_\mathrm{max}\,.$$

Z toho $x_\mathrm{max} = 2\dfrac{Mg}{k}(\sin\alpha - f_\mathrm{d}\cos\alpha) = 2x_0 = 0{,}28\ \mathrm{m}\,.$ **3 body**

d) Ve vzdálenosti x_max musí síla pružiny překonat statické tření:

$$k x_\mathrm{max} > f_\mathrm{s} F_G \cos\alpha\,,$$

$$2k\frac{Mg}{k}(\sin\alpha - f_\mathrm{d}\cos\alpha) > f_\mathrm{s} Mg\cos\alpha\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha > f_\mathrm{s} + 2f_\mathrm{d}\,.$$

Kromě toho musí mít pružina dostatečnou energii k vytažení kvádru do vzdálenosti x_0:

$$\frac{1}{2} k x_\mathrm{max}^2 > \frac{1}{2} k x_0^2 + f_\mathrm{d} F_G \cos\alpha \cdot (x_\mathrm{max} - x_0) + F_G \sin\alpha \cdot (x_\mathrm{max} - x_0)\,,$$

$$\frac{3}{2} k x_0 = \frac{3}{2} F_G(\sin\alpha - f_\mathrm{d}\cos\alpha) > f_\mathrm{d} F_G \cos\alpha + F_G \sin\alpha\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha > 5 f_\mathrm{d}\,.$$

Obě podmínky jsou pro dané hodnoty splněny. **3 body**

e) Pokud se bude kvádr pohybovat nahoru, dosáhne největší rychlosti ve vzdálenosti x_v, kde výslednice všech sil přestane působit nahoru, protože právě dosáhne nulové velikosti:

$$k x_\mathrm{v} = F_G \sin\alpha + f_\mathrm{d} F_G \cos\alpha\,, \quad \Rightarrow \quad x_\mathrm{v} = \frac{Mg}{k}(\sin\alpha + f_\mathrm{d}\cos\alpha)\,.$$

Pro dané hodnoty $x_\mathrm{v} = 0{,}199$ m. **2 body**