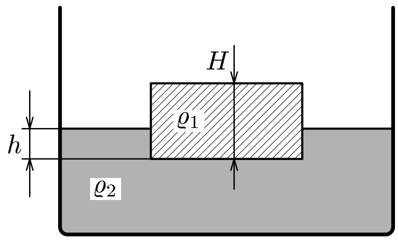
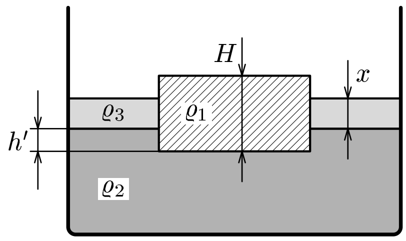
Úlohy 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1. Ocelový kvádr o hustotě $\varrho_1 = 7800\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a výšce $H = 30$ cm plove na rtuti hustoty $\varrho_2 = 13400\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

a) Určete výšku h ponořené části kvádru.

b) Na rtuť přilijeme pomalu vrstvu vody hustoty $\varrho_3 = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ o tloušťce $x = 5$ cm. Určete novou výšku h' části kvádru ponořené ve rtuti (obr. 2).

c) Na vrstvu rtuti budeme přilévat vodu tak dlouho, až bude hladina vody ve stejné rovině jako horní podstava kvádru, tj. kvádr bude celý potopený. Určete v tomto případě tloušťku vrstvy vody x_1.

d) Vysvětlete, co se stane, budeme-li přilévat další vodu.

e) Nakreslete graf závislosti výšky ponořené části kvádru h ve rtuti na tloušťce vodní vrstvy x pro $x \in \langle 0;\ 1{,}5x_1 \rangle$.

Předpokládejte, že obsah plochy podstavy kvádru je dostatečně velký, aby se kvádr nepřevrátil. Síly povrchového napětí neuvažujeme.

2. Planetka (2060) *Chiron* byla objevena 18. října 1977. V roce 1989 byla pozorována její kometární aktivita, a tak je od té doby řazena mezi planetky i mezi komety (s označením 95P/Chiron). Má oběžnou dobu kolem Slunce 50,78 roků. 19. února 1996 prošla periheliem ve vzdálenosti 8,51 AU. Předpokládejte, že během současného oběhu nedojde ke změně parametrů dráhy.

a) Určete délky velké a malé poloosy trajektorie Chironu a jeho vzdálenost od Slunce v aféliu.

b) Jakou rychlost má Chiron v periheliu a jakou v aféliu?

c) Určete obsah plochy omezené trajektorií Chironu a jeho plošnou rychlost.

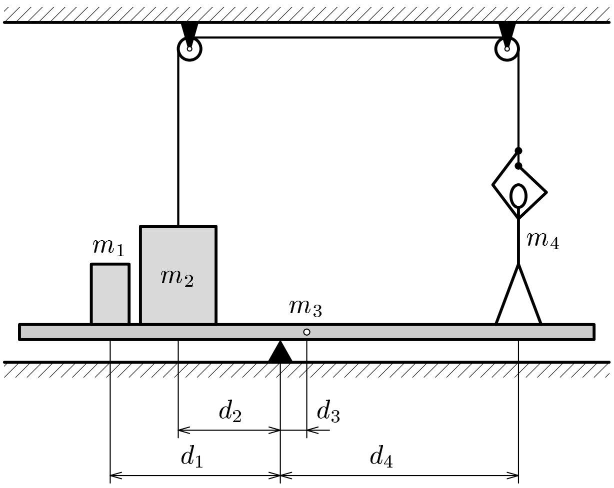
d) V kterém měsíci a roce projde Chiron znovu periheliem?

3. Homogenní trám o hmotnosti m_3 je podepřen ve vzdálenosti d_3 vlevo od svého středu (obr. 3). Na trámu jsou vlevo od podpěry položena dvě válcová tělesa o hmotnostech m_1 a m_2. Jejich svislé osy jsou ve vzdálenostech d_1 a d_2 od podpěry. Ve vzdálenosti d_4 vpravo od podpěry stojí chlapec o hmotnosti m_4, který tahá za lano vedené přes dvě kladky. Druhý konec lana je připevněn ke středu horní podstavy tělesa s hmotností m_2 . Hmotnost lana považujeme vzhledem k hmotnostem ostatních těles za zanedbatelnou. Lano nad chlapcem i tělesem s hmotností m_2 je svislé.

a) Určete, jakou silou působí chlapec na lano, je-li soustava v rovnováze a trám je vodorovný.

b) Najděte interval hodnot m_4 (pro zadané hodnoty ostatních veličin), aby chlapec mohl udržet soustavu v rovnováze. Jakými silami je lano napínáno pro hodnoty m_4 z tohoto intervalu?

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 40$ kg, $m_3 = 20$ kg, $m_4 = 50$ kg, $d_1 = 5d_3$, $d_2 = 3d_3$, $d_4 = 7d_3$.



Obr. 3

4. Teplota ohřívače tepelného motoru pracujícího na principu Carnotova cyklu je t_1, teplota chladiče t_2. Pracovní látka přijímá od ohřívače průměrný tepelný výkon P_1. Určete:

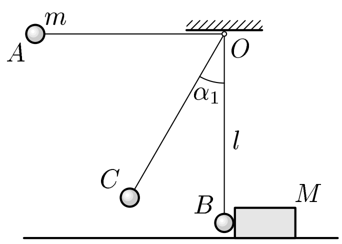
a) účinnost tepelného motoru,

b) průměrný tepelný výkon, který motor odevzdává chladiči,

c) pracovní výkon motoru.

Řešte obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 117$ °C, $t_2 = 27$ °C, $P_1 = 60$ kW.

5. Kulička o hmotnosti m je upevněna na vlákně délky l, jehož konec je upevněn v bodě O (obr. 4). Kuličku uvolníme z bodu A, který se nachází ve stejné výšce jako bod O. Při svém pohybu narazí v bodě B na kvádr s hmotností M, který leží na vodorovné podložce. Po nedokonale pružném rázu se kulička vychýlí do bodu C, kterému odpovídá úhel vychýlení vlákna α_1.



Obr. 4

a) Určete rychlost kuličky v_1 těsně před srážkou a rychlost v_2 těsně po srážce s kvádrem.

b) Určete vzdálenost d, do které se posune kvádr po vodorovné podložce, je-li součinitel smykového tření mezi kvádrem a podložkou f.

c) Určete úhel vychýlení vlákna α_2 v případě, že srážka kuličky s kvádrem by byla dokonale pružná.

Úlohu řešte nejprve obecně, pak číselně pro hodnoty

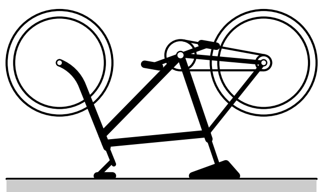
$$m = 0{,}20\ \text{kg},\ M = 0{,}80\ \text{kg},\ l = 1{,}0\ \text{m},\ \alpha_1 = 30°,\ f = 0{,}25.$$

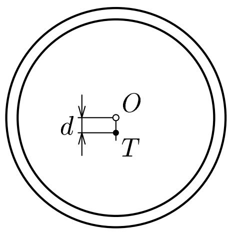
6. *Praktická úloha:* **Určení momentu setrvačnosti předního kola bicyklu**

Bicykl převraťte na řídítka a sedlo, aby se jeho přední kolo mohlo volně pohybovat (obr. 5). I dobře vycentrované kolo má obvykle těžiště poněkud mimo osu a po vychýlení se začne zvolna kývat okolo rovnovážné polohy, ve které se těžiště nachází pod osou. V ideálním případě by tření v ose kola bylo zanedbatelné, kmity by byly netlumené a pro dobu kyvu s malou amplitudou by platilo

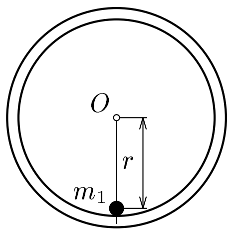
$$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{J}{D}} = \pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}, \tag{1}$$

kde J je moment setrvačnosti kola, D jeho direkční moment, m hmotnost kola a d vzdálenost těžiště kola od osy (obr. 6).


Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Ve skutečnosti tření v ložiskách existuje a direkční moment dobře vyváženého kola je nepatrný, srovnatelný s momentem brzdících sil v ložiskách. Proto je kývání, pokud k němu vůbec dojde, pomalé a velmi tlumené. Vztah (1) pro ně platí jen přibližně.

Připevníme-li v rovnovážné poloze pod těžiště kola do vzdálenosti r od osy (nejlépe těsně nad ráfek) přívažek o dostatečně velké hmotnosti m_1 (obr. 7), direkční moment se podstatně zvětší a poněkud se zvětší i moment setrvačnosti. Po vychýlení z rovnovážné polohy o malý úhel začne kolo kývat s dobou kyvu τ_1 a jeho kmity budou jen málo tlumené. Změníme-li hmotnost přívažku na $m_2 > m_1$, doba kyvu se změní na $\tau_2 < \tau_1$. Platí

$$\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{J + m_1 r^2}{D + m_1 g r}}\,, \qquad \tau_2 = \pi\sqrt{\frac{J + m_2 r^2}{D + m_2 g r}}\,. \tag{2}$$

Z této soustavy rovnic o neznámých J a D odvodíme pro moment setrvačnosti kola vztah:

$$J = \frac{(m_2 - m_1) r g \tau_1^2 \tau_2^2 - \pi^2 r^2 (m_2 \tau_1^2 - m_1 \tau_2^2)}{\pi^2(\tau_1^2 - \tau_2^2)}\,. \tag{3}$$

Úkoly:

a) Zdůvodněte vztahy (2) a odvoďte vztah (3).

b) Realizujte popsané měření na bicyklu, který je v dobrém technickém stavu, a vypočtěte moment setrvačnosti jeho předního kola.

c) Vyjměte přední kolo z vidlice a zvažte je. Určete jeho hmotnost m bez osičky. (Hmotnost osičky odhadněte přibližným výpočtem z jejích rozměrů a odečtěte od navážené hodnoty.)

d) Určete *poloměr setrvačnosti* kola

$$R = \sqrt{\frac{J}{m}}\,,$$

tj. poloměr prstence o stejné hmotnosti a stejném momentu setrvačnosti. Porovnejte ho se skutečným poloměrem kola.

7. Ve větších hloubkách Bajkalského jezera je teplota 4,0 °C; při hladině byl naměřen tlak $p_\mathrm{h} = 99{,}4$ kPa.

a) Jaká je hustota vzduchové bubliny v hloubce 50 m?

b) V jaké hloubce se nachází potápěč, je-li hustota vzduchové bubliny v jeho okolí rovna 0,5 % hustoty okolní vody ($\varrho_\mathrm{v} = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$)?

Hustota vzduchu za normálních podmínek ($p_0 = 1{,}013\,25 \cdot 10^5$ Pa, $t_0 = 0$ °C) je $\varrho_0 = 1{,}293\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.