Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autor úloh: P. Šedivý

1. a) Bez tření by se lyžař pohyboval se zrychlením $a = g \sin\alpha$. Dosáhl by rychlosti

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2gl\sin\alpha} = 13{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

a jízda by trvala

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = 4{,}45\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

b) Ve skutečnosti se lyžař pohyboval se zrychlením

$$a_1 = \frac{F_G \sin\alpha - fF_G\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \frac{2l}{t_1^2}\,.$$

Z toho

$$f = \frac{\sin\alpha - \dfrac{2l}{gt_1^2}}{\cos\alpha} = 0{,}236\,.$$

4 body

c) Na konci svahu má lyžař

rychlost $v_1 = \dfrac{2l}{t_1}$ a kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}mv_1^2$,

která se při jízdě po louce spotřebuje na vykonání práce při překonávání tření. Platí

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgfs\,, \qquad s = \frac{v_1^2}{2gf} = \frac{2l^2}{gft_1^2} = 10{,}8\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

2. a) Vyjdeme z obr. R1, délku trámu označme l. Zvolíme vztažnou soustavu s vodorovnou osou x a svislou osou y. Z momentové věty pro osu v bodě A plyne

$$F_B|AS| = F_G|AP|\,, \qquad F_B l\cos\frac{\alpha}{2} = F_G\frac{l}{2}\sin\alpha = F_G l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$F_B = F_G\sin\frac{\alpha}{2} = 82{,}8\ \mathrm{N}\,.$$

4 body

b) Vektorový součet všech sil působících na trám je nulový: $\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{0}$. Z toho ve vodorovném směru, tj. ve směru osy x

$$F_{Ax} = -F_{Bx} = F_B \cos\frac{\alpha}{2} = F_G \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

ve svislém směru, tj. ve směru osy y

$$F_{Ay} = F_G - F_{By} = F_G - F_B \sin\frac{\alpha}{2} = F_G - F_G \sin^2\frac{\alpha}{2} = F_G \cos^2\frac{\alpha}{2}\,,$$

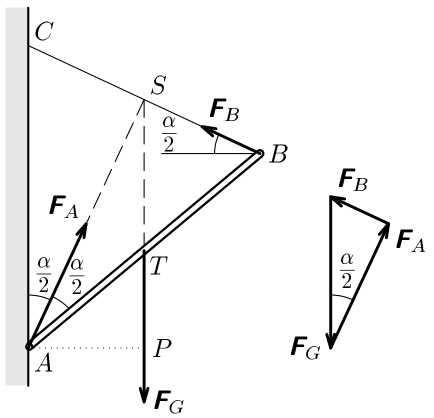
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{F_G^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^4\frac{\alpha}{2}\right)} = F_G \cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$F_A = 177{,}6\ \mathrm{N}\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_A$ je od svislého směru odchýlena o úhel β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \frac{F_G \sin\frac{\alpha}{2}}{F_G \cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,. \qquad \beta = \frac{\alpha}{2}\,.$$

6 bodů



Obr. R1

Jednodušší řešení: Vektorová přímka síly $\boldsymbol{F}_A$ musí procházet průsečíkem vektorových přímek sil $\boldsymbol{F}_B$ a $\boldsymbol{F}_G$, tedy bodem S. Tím je určen směr síly $\boldsymbol{F}_A$, která je od svislého směru odchýlena o $\alpha/2$. Silový trojúhelník sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ a $\boldsymbol{F}_G$ je podobný s trojúhelníkem ASC, který je pravoúhlý. Z toho plyne

$$F_A = F_G \cos\frac{\alpha}{2}\,, \quad F_B = F_G \sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

3. a) Z grafu odečteme $T = 1{,}50$ s. Z toho $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 4{,}19\ \mathrm{s}^{-1}$.

1 bod

b) Platí

$$F = -ky = ma = -m\omega^2 y\,, \qquad k = m\omega^2 = 3{,}51\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

1 bod

c) Nejprve určíme amplitudu zrychlení

$$a_\mathrm{m} = \frac{F_\mathrm{m}}{m} = \frac{0{,}75\ \mathrm{N}}{0{,}200\ \mathrm{kg}} = 3{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Platí

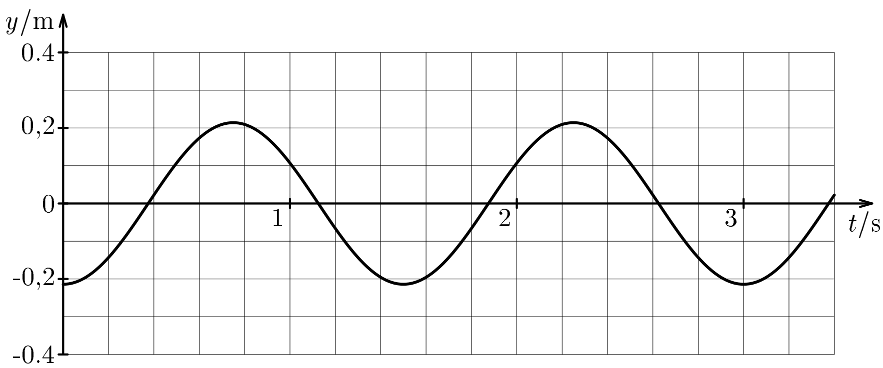
$$y_\mathrm{m} = \frac{a_\mathrm{m}}{\omega^2} = 0{,}214\ \mathrm{m}\,, \qquad v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = \frac{a_\mathrm{m}}{\omega} = 0{,}895\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

d) Z grafu je $F = F_\mathrm{m}\cos(\omega t) = -ky$. Z toho

$$y = -\frac{F_\mathrm{m}}{k}\cos(\omega t) = -y_\mathrm{m}\cos(\omega t) = y_\mathrm{m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}\,.$$

3 body



Obr. R2

2 body

4. a) Ze vztahu

$$l = l_0(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = l_0 + \Delta l$$

vyjádříme relativní prodloužení:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\,.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$:

$$\begin{aligned} 100\{\alpha_1\} + 1\cdot 10^4\{\alpha_2\} &= 0{,}00120\,, \\ 200\{\alpha_1\} + 4\cdot 10^4\{\alpha_2\} &= 0{,}00251\,. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme:

$$\{\alpha_1\} = 1{,}145\cdot 10^{-5}\,,\quad \{\alpha_2\} = 5{,}5\cdot 10^{-9}\,,$$
$$\alpha_1 = 1{,}145\cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\,,\quad \alpha_2 = 5{,}5\cdot 10^{-9}\ \mathrm{K}^{-2}\,.$$

5 bodů

b) Závislost objemu na teplotě vyjadřuje vztah, který odvodíme pro těleso krychlového tvaru:

$$V = l^3 = l_0^3\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0\left(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right)\,.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty $\{\beta_1\}$, $\{\beta_2\}$:

$$\begin{aligned} 1 + 100\{\beta_1\} + 1\cdot 10^4\{\beta_2\} &= 1{,}003604322\,, \\ 1 + 200\{\beta_1\} + 4\cdot 10^4\{\beta_2\} &= 1{,}007548916\,. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme:

$$\{\beta_1\} = 3{,}434\cdot 10^{-5}\,,\quad \{\beta_2\} = 1{,}7\cdot 10^{-8}\,,$$
$$\beta_1 = 3{,}434\cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\,,\quad \beta_2 = 1{,}7\cdot 10^{-8}\ \mathrm{K}^{-2}\,.$$

5 bodů

Jiné řešení úlohy b): Vyjdeme ze vztahu

$$V_0(1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)^3 = V_0[1+3(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)+3(\alpha_1^2 t^2+2\alpha_1\alpha_2 t^3+(\alpha_2^2 t^4)+(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)^3]$$

Zanedbáním členů třetího a vyšších řádů dostaneme:

$$V_0[1 + 3\alpha_1 t + 3(\alpha_2 + \alpha_1^2)t^2 \approx V_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)]\,,$$
$$\beta_1 = 3\alpha_1 = 3{,}435\cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\,,\qquad \beta_2 = 3(\alpha_2 + \alpha_1^2) = 1{,}69\cdot 10^{-8}\ \mathrm{K}^{-2}\,.$$

Výsledky získané oběma způsoby se prakticky shodují.