Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh:

1. a) Uražená dráha je $v_0 t_1 = (v - v_0)(t - t_1)$. Z rovnice plyne

$$t_1 = \frac{v - v_0}{v} t_0 = 45 \text{ min.}$$ **1 bod**

b) Doba plavby je $t_0 = \frac{d_1}{v_0} + \frac{d_1}{v - v_0}$. Z rovnice plyne

$$d_1 = \frac{v - v_0}{v} v_0 t_0 = 4\,050 \text{ m.}$$ **2 body**

c) Uražená dráha je $(v + v_0)t_2 = (v - v_0)(t_0 - t_2)$. Z rovnice plyne

$$t_2 = \frac{v - v_0}{2v} t_0 = 22{,}5 \text{ min.}$$ **2 body**

d) Uražená dráha je $(v - v_0)t_3 = (v + v_0)(t_0 - t_3)$. Z rovnice plyne

$$t_3 = \frac{v + v_0}{2v} t_0 = 37{,}5 \text{ min.}$$ **2 body**

e) Doba plavby je $t_0 = \frac{d_2}{v + v_0} + \frac{d_2}{v - v_0}$. Z rovnice plyne

$$d_2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2v} t_0 = 10\,125 \text{ m.}$$ **2 body**

f) Jde pouze o záměnu pořadí plavebních úseků, výsledek je stejný jako v úloze e):

$$d_3 = d_2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2v} t_0 = 10\,125 \text{ m.}$$ **1 bod**

2. a) Na třetím úseku je zrychlení o velikosti $a_3 = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{3 - 0}{9 - 7} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 1{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ způsobeno třecí silou o velikosti $F_t = m a_3 = f m g$. Z rovnice plyne

$$f = \frac{a_3}{g} = 0{,}15.$$ **1 bod**

b) Dráha je číselně rovna obsahu plochy omezené grafem:

$$s = \left[\frac{3 \cdot 3}{2} + 3(7 - 3) + \frac{3 \cdot (9 - 7)}{2}\right] \text{ m} = 19{,}5 \text{ m}.$$ **1 bod**

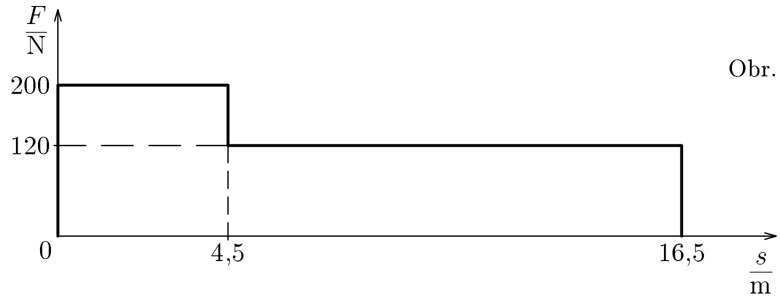
c) Práce vykonaná chlapcem je rovna práci spotřebované třecí silou na celé dráze:

$$W = F_t s = f m g s = 2\,340 \text{ J}$$ **1 bod**

d) Průměrný výkon chlapce určíme jako podíl celkové práce a doby jeho působení na bednu $\Delta t = 7$ s:

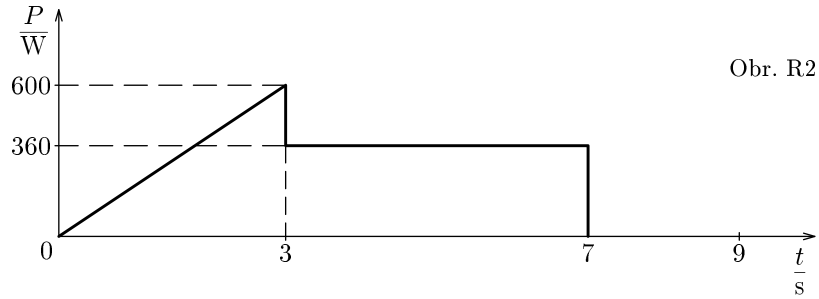
$$P = \frac{W}{\Delta t} = 334 \text{ W}.$$ **1 bod**

e) Síla na prvním úseku má velikost $F_1 = f m g + m a_1$, kde $a_1 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ určíme z grafu rychlosti. Síla na druhém úseku má velikost $F_2 = m g f$ (obr. R1).



Obr. R1

Na prvním úseku okamžitá rychlost rovnoměrně roste s časem, proto při konstantní síle F_1 je okamžitý výkon chlapce podle vzorce $P = F_1 v = F_1 a_1 t$ přímo úměrný času. V čase $t_1 = 3$ s je jeho okamžitá hodnota $P_1 = F_1 v_1 = 600$ W. Na druhém úseku je výkon chlapce konstantní $P_2 = F_2 v_2 = 360$ W (obr. R2).



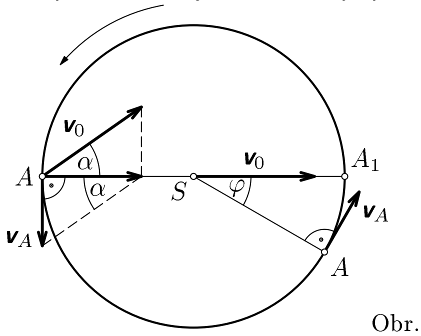
Obr. R2

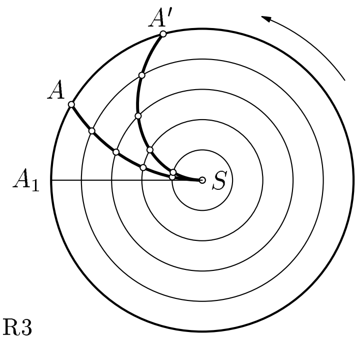
4 body

f) V každém grafu je práce číselně rovna obsahu plochy pod grafem.
V prvním grafu $w = [200 \cdot 4{,}5 + 120(16{,}5 - 4{,}5)]$ J $= 2\,340$ J.
V druhém grafu $W = \left[\frac{600 \cdot 3}{2} + 360(7-3)\right]$ J $= 2\,340$ J.

2 body

3. Úlohy a) až d) budeme řešit z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě vně desky. V obr. R2 jsou zobrazeny rychlosti v počátečním okamžiku.





Obr. R2 Obr. R3

a) Rychlost $\boldsymbol{v}_0$ musí směřovat do bodu A', do něhož se v tomtéž okamžiku dostane míček i Adam na obvodu desky. Z této podmínky plyne

$$\varphi = \omega t_\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{R}{v_0} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad} = 30° \,.$$ **2 body**

b) Míček se v počátečním okamžiku získá v rovině desky rychlost, která je výslednicí rychlosti Adama $\boldsymbol{v}_A$ a rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ vzhledem k Adamovi. Výslednice musí směřovat do středu desky. Platí:

$$v_A = \frac{2\pi R}{T}\,, \qquad \alpha = \arcsin\frac{v_A}{v_0} = \arcsin\frac{2\pi R}{v_0 T} = 35° \,.$$ **2 body**

c) Hledané doby jsou

$$t_\varphi = \frac{R}{v_0} = 0{,}83\ \text{s}\,, \qquad t_\alpha = \frac{R}{v_0 \cos\alpha} = 1{,}0\ \text{s}\,.$$ **2 body**

d) Stejným způsobem jako v úlohách a), b) dostaneme

$$\varphi_1 = \frac{2\pi R}{T'} = \frac{5}{12}\pi\text{rad} = 75°\,, \qquad t\varphi' = t_\varphi = 0{,}83\ \text{s}\,.$$

Úhel α' neexistuje, neboť $v'_A > v_0$. Míček hozený Adamem nemůže do středu doletět. **2 body**

e) Vzdálenost r hozeného míče od středu a úhel φ otočení desky se v závislosti na čase rovnoměrně zvětšují. Platí

$$r = v_0 t\,, \quad \varphi = \omega t = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi r}{v_0 t}\,.$$

Úhel otočení je přímo úměrný poloměru. Pro sestrojení grafu sestavíme tabulku:

r	0	$0{,}2R$	$0{,}4R$	$0{,}6R$	$0{,}8R$	R
$\varphi(r)$ pro T	0	6°	12°	18°	24°	30°
$\varphi(r)$ pro T'	0	15°	30°	45°	60°	75°

Graf – obr. R3 **2 body**

4. a) Označme m hmotnost soupravy. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \qquad v_0 = \sqrt{gl\sin\alpha} \doteq 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mg\left(s_1 - \frac{l}{2}\right)\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_1^2\,, \qquad s_1 = \frac{l}{2} + \frac{v_1^2}{2g\sin\alpha} \doteq 384\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

c) Na nakloněnou rovinu vyjede část soupravy o hmotnosti $\frac{s_2 m}{l}$. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{s_2}{l}mg\frac{s_2}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_2^2\,, \qquad s_2 = v_2\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}} \doteq 75\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

d) Souprava se pohybuje se stálým zrychlením pouze v případě, že se celá nachází na nakloněné rovině. **1 bod**

5. a) Vyjdeme z rovnic vrhu

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

V čase $t = t_1$ platí:

$$h_0 = h_0 + v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 t_1 \sin\alpha = \frac{g t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 \sin\alpha = \frac{g t_1}{2}\,,$$

$$d = v_0 t_1 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_0 \cos\alpha = \frac{d}{t_1}\,.$$

Z toho

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \frac{g t_1^2}{2d}\,, \qquad \alpha \doteq 22^\circ\,,$$

$$v_0 = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} + \frac{g^2 t_1^2}{4}} \doteq 17{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

V čase $t = t_1/2$ platí:

$$y = h = h_0 + \frac{v_0 t_1 \sin\alpha}{2} - \frac{g t_1^2}{8} = h_0 + \frac{g t_1^2}{8} \doteq 3{,}6\ \mathrm{m}\,.$$

6 bodů

b) Pro délku vrhu platí

$$d = v_0 t_1 \cos\alpha = v_0 \cos\alpha \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\,. \quad \text{Z toho} \quad v_0 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}}\,.$$

Velikost počáteční rychlosti je minimální pro $\alpha = \alpha' = 45^\circ$, kdy $\sin 2\alpha = 1$. Pak

$$v_0 = v_{\min} = \sqrt{gd} \doteq 14{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

c) Doba letu při hodu podle b) je

$$t_1' = \frac{d}{v_{\min} \cos\alpha'} = \frac{d}{\sqrt{gd} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \doteq 2{,}1\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

6. a) V místě přistání působí na sondu gravitační síla o velikosti

$$F_{\mathrm{g}} = 0{,}450 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 4{,}4 \text{ N}.$$

Intenzita gravitačního pole má velikost $K = \dfrac{F_{\mathrm{g}}}{m} = 0{,}0089 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. **1 bod**

b) Označme M hmotnost planetky. Z rovnic

$$K = \frac{\varkappa M}{r^2}, \qquad M = \frac{4}{3}\pi \varrho r^3 \quad \text{plyne} \quad r = \frac{3K}{4\pi\varkappa\varrho} \doteq 14{,}5 \text{ km}$$ **3 body**

c) Označme m hmotnost družice. Z rovnosti mezi gravitační a dostředivou silou a z předcházejícího vztahu plyne

$$\frac{m v_{\mathrm{k}}^2}{r} = \frac{\varkappa M m}{r^2} \qquad v_{\mathrm{k}} = \frac{K}{\sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\varrho}} \doteq 11{,}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

V porovnání s první kosmickou rychlostí tělesa na Zemi je tato rychlost podstatně menší a jsme schopni jí dosáhnout např. i hodem tělesa rukou. **3 body**

d) Platí $T = (2\pi r)/v_{\mathrm{k}}$. Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\varkappa\varrho}} \doteq 2 \text{ h } 14 \text{ min}.$$

Perioda je srovnatelná s periodou družice Země, závisí totiž pouze na hustotě centrálního tělesa, nikoliv na jeho velikosti. Země má větší střední hustotu, perioda oběhu v v její těsné blízkosti je proto menší, přibližně 1 h 24 min. **3 body**