Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 4) a I. Volf (3)

1. a) Konečná rychlost každého automobilu je

$$v_\mathrm{k} = a_1\Delta t + a_2\Delta t = (a_1 + a_2)\Delta t = 16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **2 body**

b) Automobil A urazil dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1(\Delta t)^2 + (v_A\Delta t + \frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2),$$

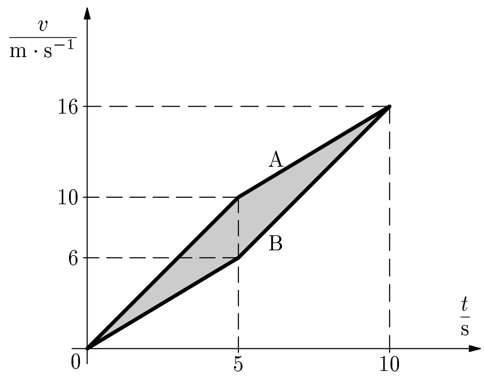
kde $v_A = a_1\Delta t$ je jeho rychlost na konci prvního úseku. Obdobně automobil B urazil dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2 + (v_B\Delta t + \frac{1}{2}a_1(\Delta t)^2),$$

kde $v_B = a_2\Delta t$ je jeho rychlost na konci prvního úseku. Hledaná vzdálenost mezi automobily pak je

$$\Delta d = s_1 - s_2 = (a_1 - a_2)(\Delta t)^2 = 20\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

c) Graf závislosti rychlosti na čase obou automobilů



Obr. R1

Vzdálenost automobilů odpovídá obsahu vyšrafovaného rovnoběžníka:

$$\Delta d = 2\left(\frac{5\cdot 10}{2} - \frac{5\cdot 6}{2}\right)\ \mathrm{m},$$

$$\Delta d = 20\ \mathrm{m}.$$

2 body

d) Každý automobil dosáhne z klidu za čas $2\Delta t$ konečné rychlosti v_k. Průměrný výkon obou automobilů je proto stejný

$$P_\mathrm{p} = \frac{\frac{1}{2}mv_\mathrm{k}^2}{2\Delta t} = 15{,}4\ \mathrm{kW}.$$

Okamžitý výkon $P = Fv = mav$ je při daném zrychlení maximální při největší rychlosti, tj. vždy na konci rovnoměrně zrychleného úseku. Automobil A má při daném číselném zadání maximální výkon na konci 1. úseku $P_\mathrm{Amax} = 24$ kW (na konci 2. úseku je výkon 23,0 kW); automobil B má maximální výkon na konci 2. úseku $P_\mathrm{Bmax} = 38{,}4$ kW.

3 body

2. a) Označme α sklon nakloněné roviny. Z rovnováhy sil

$$mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha = F, \quad F = mg,$$

kde F je velikost tahové síly ve vlákně, plyne po vyloučení F:

$$f = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\dfrac{h}{l}}{\dfrac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}} = \sqrt{\frac{l-h}{l+h}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58.$$

3 body

b) Z pohybových rovnic

$$mg - F = ma, \quad F - mg\sin\alpha = ma \tag{1}$$

po vyloučení velikosti F tahové síly ve vlákně (1) plyne:

$$mg - mg\sin\alpha = 2ma\,,$$

$$a = \frac{1-\sin\alpha}{2}g = \frac{l-h}{2l}g = \frac{1}{4}g = 2{,}45\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

c) Velikost tahové síly F určíme ze vztahů (1):

$$F = mg\sin\alpha + ma = mg\frac{1+\sin\alpha}{2} = mg\frac{l+h}{2l} = 0{,}75mg = 1{,}47\ \mathrm{N}.$$

1 bod

d) Těleso A urazí nejprve rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $\boldsymbol{a}$ dráhu h, přičemž dosáhne rychlosti $\boldsymbol{v}$, poté urazí rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti $a_1 = g\sin\alpha$ dráhu $s_1 = \dfrac{v^2}{2a_1}$. Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh = mgh\sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

bezprostředně před zastavením tělesa B o podložku plyne

$$v = \sqrt{gh(1-\sin\alpha)}.$$

Pro hledanou dráhu s pak platí

$$s = h + s_1 = h + \frac{v^2}{2a_1} = h + \frac{gh(1-\sin\alpha)}{2g\sin\alpha} = h + \frac{h\dfrac{l-h}{l}}{2\dfrac{h}{l}} = \frac{l+h}{2} = 1{,}5\ \mathrm{m}.$$

4 body

3. a) Z časových rovnic vodorovného vrhu $x = v_0 t,\ y = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$, dostaneme vyloučením času t rovnici trajektorie

$$y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2. \tag{2}$$

Z ní položením $x = d_1$, $y = h_1$ dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2(h_0 - h_1)}}d_1, \tag{3}$$

$$v_0 = 20{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Označme d x-ovou souřadnici místa dopadu. Položením $y = 0$, $x = d$ v rovnici (2) a s použitím rovnice (3) dostaneme

$$d = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = d_1\sqrt{\frac{h_0}{h_0 - h_1}},$$

tedy hledaná vzdálenost je

$$d_2 = d - d_1 = d_1\left(\sqrt{\frac{h_0}{h_0 - h_1}} - 1\right) = 2{,}94\ \mathrm{m}.$$

3 body

c) Ze zákona zachování mechanické energie $mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$, s použitím rovnice (3) plyne

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \sqrt{\frac{g}{2(h_0 - h_1)}d_1^2 + 2gh_0} = 21{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

d) Položením $y = 0$, $x = d_3$ v rovnici (2) dostaneme

$$v_0' = \sqrt{\frac{g}{2h_0}}d_3 = 27{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

Poznámka:
U špičkových hráčů dosahuje počáteční rychlost míčku při podání hodnotu přes 50 m·s^{-1}, přesto míček dopadne do pole podání. Důvody jsou dva: 1. rotace míčku a odpor vzduchu společně způsobí pohyb po křivce odlišné od paraboly, 2. míček opouští raketu v předklonu hráče s počátečním směrem rychlosti mírně šikmo dolů.

4. a)

$$\frac{\varrho_{\mathrm{Z}}}{\varrho_{\mathrm{M}}} = \frac{\dfrac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}^3}}{\dfrac{M_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^3}} = \frac{M_{\mathrm{Z}}}{M_{\mathrm{M}}}\left(\frac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{Z}}}\right)^3 = 1{,}64.$$

2 body

b)

$$\frac{S_{\mathrm{Z}}}{S_{\mathrm{M}}} = \frac{4\pi R_{\mathrm{Z}}^2}{4\pi R_{\mathrm{M}}^2} = \left(\frac{R_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{M}}}\right)^2 = 13{,}5.$$

2 body

c)

$$\frac{a_{\mathrm{gZ}}}{a_{\mathrm{gM}}} = \frac{\varkappa\dfrac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}^2}}{\varkappa\dfrac{M_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^2}} = \frac{M_{\mathrm{Z}}}{M_{\mathrm{M}}}\left(\frac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{Z}}}\right)^2 = 6{,}04.$$

2 body

d)

$$\frac{v_{\mathrm{uZ}}}{v_{\mathrm{uM}}} = \frac{\sqrt{2\varkappa\dfrac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}}}}{\sqrt{2\varkappa\dfrac{M_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}}}} = \sqrt{\frac{M_{\mathrm{Z}}}{M_{\mathrm{M}}}\frac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{Z}}}} = 4{,}71.$$

2 body

e) Z rovnosti $\varkappa\frac{M_{\mathrm{Z}}}{r_{\mathrm{Z}}^2} = \varkappa\frac{M_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}^2}$ velikostí intenzit gravitačních polí v hledaném bodě B pak plyne

$$\frac{r_{\mathrm{Z}}}{r_{\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{M_{\mathrm{Z}}}{M_{\mathrm{M}}}} = 9{,}02.$$

2 body