Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: J. Jírů (1), M. Jarešová (2, 3) a B. Vybíral (4)

1. a) Pro úseky s rovnoměrným pohybem platí rovnice

$$s_1 - s_0 = v_\mathrm{m}(t_1 - t_0)\,, \qquad s_2 - s_0 = v_\mathrm{m}(t_2 - t_0)\,. \tag{1}$$

Maximální rychlost je

$$v_\mathrm{m} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 11{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{2}$$

2 body

b) Při rozbíhání z klidu se stálým výkonem působící síly platí:

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,, \quad v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2Pt_0}{m}}\,. \tag{3}$$

Integrací dostaneme:

$$s_0 = \int_0^{t_0} v\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{8P}{9m}t_0^3}\,. \tag{4}$$

Z rovnic (2), (3) a (4) plyne

$$s_0 = \frac{2}{3}v_\mathrm{m}t_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}t_0\,. \tag{5}$$

Dosazením do (1) a úpravou dostaneme:

$$s_1 - \frac{2}{3}v_\mathrm{m}t_0 = v_\mathrm{m}t_1 - v_\mathrm{m}t_0\,, \qquad \frac{1}{3}v_\mathrm{m}t_0 = v_\mathrm{m}t_1 - s_1\,,$$

$$t_0 = 3\left(t_1 - \frac{s_1}{v_\mathrm{m}}\right) = 3\frac{(s_2 - s_1)t_1 - s_1(t_2 - t_1)}{s_2 - s_1} = 3\frac{s_2t_1 - s_1t_2}{s_2 - s_1} = 3{,}75\ \mathrm{s}\,. \tag{6}$$

Dosazením z (6) do (5) dostaneme:

$$s_0 = 2\frac{s_2t_1 - s_1t_2}{t_2 - t_1} = 28{,}7\ \mathrm{m}\,.$$

Z (3) plyne:

$$P = \frac{mv_\mathrm{m}^2}{2t_0} = \frac{m(s_2 - s_1)^3}{6(t_2 - t_1)^2(s_2t_1 - s_1t_2)} = 1320\ \mathrm{W}\,.$$

6 bodů

c) Okamžité zrychlení je $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{P}{mv}$. Na konci zrychleného úseku dostaneme:

$$a_0 = \frac{P}{mv_\mathrm{m}} = \frac{(s_2 - s_1)^2}{6(t_2 - t_1)(s_2t_1 - s_1t_2)} = 1{,}53\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

2 body

2. a) 1. Platí $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\dfrac{\varrho r\varphi}{S}} + \dfrac{1}{\dfrac{\varrho(2\pi-\varphi)r}{S}}$,

po úpravě

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{\varrho r}\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\pi-\varphi}\right), \qquad R = \frac{\varrho r}{S}\frac{\varphi(2\pi-\varphi)}{2\pi}.$$

2 body

2. Určíme lokální extrémy funkce $R = R(\varphi)$.

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\varrho r}{\pi S}(\pi - \varphi) = 0\,, \quad \text{z čehož} \quad \varphi = \pi.$$

$\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\dfrac{\varrho r}{\pi S} < 0$. Pro úhel $\varphi = \pi$ nastává lokální maximum.

Potom $R_{\max} = \dfrac{\varrho\pi r}{2S}$.

2 body

b) 1. Pro obecný úhel α je

$$R_1 = \varrho_1\frac{(\pi-\alpha)r}{S} + \varrho_2\frac{\alpha r}{S}, \quad R_2 = \varrho_1\frac{\alpha r}{S} + \varrho_2\frac{(\pi-\alpha)r}{S}.$$

Potom

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{r}\left[\frac{1}{\alpha_1(\pi-\alpha)+\varrho_2\alpha} + \frac{1}{\varrho_1\alpha + \varrho_2(\pi-\alpha)}\right].$$

Po úpravě

$$R = \frac{r}{S}\frac{[(\varrho_2-\varrho_1)\alpha + \pi\varrho_1][(\varrho_1-\varrho_2)\alpha+\pi\varrho_2]}{\pi(\varrho_1+\varrho_2)}.$$

3 body

2. Nyní určíme lokální extrémy této funkce:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{r}{S\pi(\varrho_1+\varrho_2)}(\varrho_2-\varrho_1)[(\varrho_1-\varrho_2)\alpha+\pi\varrho_2]+(\varrho_1-\varrho_2)[(\varrho_2-\varrho_1)\alpha+\pi\varrho_1] =$$

$$= \frac{r(\varrho_1-\varrho_2)^2}{S\pi(\varrho_1+\varrho_2)}[\pi - 2\alpha]\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ dostaneme $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Druhá derivace: $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\alpha^2} = \dfrac{-4r(\varrho_1-\varrho_2)^2}{S\pi(\varrho_1+\varrho_2)} < 0$, nastává lokální maximum.

Potom $R_{\max} = \dfrac{\pi r}{4S}(\varrho_1+\varrho_2)$.

3 body

3. a) Pro osvětlení platí $E = \dfrac{I\cos\alpha}{r^2}$.

Užitím sinové věty dostaneme

$$\frac{R}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\alpha}\,, \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{h}{R}\sin\beta\,, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}\sin^2\beta}\,.$$

Dále platí

$$\frac{r}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sin\beta}\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Použitím součtového vzorce pro $\sin(\alpha+\beta)$ a dosazením výše uvedených vztahů pro $\sin\alpha$ a $\sin\beta$ dostaneme

$$r = \frac{R}{\sin\beta}\left(\frac{h}{R}\sin\beta\cos\beta + \sin\beta\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}\sin^2\beta}\right) = h\cos\beta + \sqrt{R^2 - h^2\sin^2\beta}\,.$$

Po dosazení do vztahu pro E dostaneme

$$E = \frac{I\sqrt{R^2 - h^2\sin^2\beta}}{R\left(h\cos\beta + \sqrt{R^2 - h^2\sin^2\beta}\right)^2}\,.$$

5 bodů

b) Je-li $h = R$, pak

$$E = \frac{IR\sqrt{1 - \sin^2\beta}}{R\left(R\cos\beta + R\sqrt{1 - \sin^2\beta}\right)^2} = \frac{I}{4R^2\cos\beta}\,.$$

Nejmenší osvětlení je pro $\beta = 0$, tj. $E_{\min} = \dfrac{I}{4R^2} = 50\ \text{lx}$.

Největší osvětlení je pro $\beta_{\max} = 45^\circ$, tj. $E_{\max} = \dfrac{I\sqrt{2}}{4R^2} = 70{,}7\ \text{lx}$.

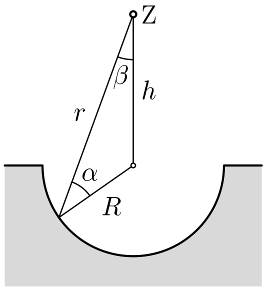
2 body

c) Střední hodnota osvětlení $E_{\mathrm{s}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I}{4R^2} + \dfrac{I\sqrt{2}}{4R^2}\right) = \dfrac{I}{4R^2\cos\beta}$, z čehož

$$\cos\beta = 2(\sqrt{2} - 1), \quad \beta \doteq 34^\circ\,.$$

2 body

d) Má-li být osvětlení rovnoměrné, musí být zdroj umístěn ve středu kulové plochy. Osvětlení plochy je pak $E_R = \dfrac{I}{R^2} = 200\ \text{lx}$. **1 bod**



Obr. R1

4. a) Na bublinku působí vztlaková síla a odporová síla podle Stokesova vztahu. Pohybová rovnice bublinky (směr vzhůru volíme jako kladný) je

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\mathrm{p}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho - \varrho_{\mathrm{p}}) g - 6\pi\eta r v \,. \tag{1}$$

Přepíšeme ji do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a - bv \,, \qquad \text{kde} \qquad a = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{p}}} - 1\right) g \,, \quad b = \frac{9\eta}{2r^2 \varrho_{\mathrm{p}}} \quad \text{jsou konstanty.} \tag{2}$$

Separujeme proměnné a integrujeme v mezích daných počátečním podmínkami:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{a - bv} = -\frac{1}{b} \int_0^v \frac{-b\,\mathrm{d}v}{a - bv} = -\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{a} v\right) .$$

Z toho rychlost

$$v = \frac{a}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right) = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{p}}} - 1\right) \frac{2r^2 g \varrho_{\mathrm{p}}}{9\eta} \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \varrho_{\mathrm{p}}} t\right)\right] ,$$

$$v \approx \frac{2r^2 g \varrho}{9\eta} \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \varrho_{\mathrm{p}}} t\right)\right] . \tag{3}$$

4 body

b) Mezní rychlost dostaneme z (3) pro $t \to \infty$, nebo přímo z pohybové rovnice (1) resp. (2) pro mezní případ nulové změny rychlosti $\left(\text{tj. } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0\right)$:

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{a}{b} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{p}}} - 1\right) \frac{2r^2 g \varrho_{\mathrm{p}}}{9\eta} \approx \frac{2r^2 g \varrho}{9\eta} = 0{,}127\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \,.$$

2 body

c) Po spojení vznikne bublinka, pro jejíž poloměr platí $r'^3 = 2r^3$, neboli $r' = r\sqrt[3]{2}$. Pak mezní rychlost vzroste na

$$v'_{\mathrm{m}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{p}}} - 1\right) \frac{2r'^2 g \varrho_{\mathrm{p}}}{9\eta} = v_{\mathrm{m}} \sqrt[3]{4} = 0{,}202\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \,.$$

2 body

d) Musí platit

$$1 - \frac{1}{100} = 1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \varrho_{\mathrm{p}}} t_1\right) , \quad \text{neboli} \quad t_1 = \frac{2r^2 \varrho_{\mathrm{p}}}{9\eta} \ln 100 = 1.2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s} \,.$$

Bublinka dosáhne 99 % mezní rychlosti za prakticky neměřitelnou dobu. To je způsobeno jejím malým poloměrem, který se navíc ve vzorci vyskytuje v druhé mocnině, a malou hustotou plynu v bublince. **2 body**