

Řešení úloh 1. kola 44. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 4, 6, 7), M. Jarešová (2, 3) a D. Kluvanec (5)

1. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v ústí hadice. Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

plynou pro dobu letu vody a pro výšku místa dopadu na stěnu vztahy

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}, \quad h = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1)$$

Extrém funkce $h = h(\alpha)$ určíme užitím diferenciálního počtu:

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{d}{\cos^2 \alpha} - \frac{g d^2 \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{d}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{g d}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha \right) \begin{cases} = 0 & \text{pro } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g d} \\ < 0 & \text{pro } \operatorname{tg} \alpha > \frac{v_0^2}{g d} \\ > 0 & \text{pro } \operatorname{tg} \alpha < \frac{v_0^2}{g d} \end{cases}$$

Pro elevační úhel $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_0^2}{g d}$ dosáhne tedy funkce $h(\alpha)$ maxima. Pro dané hodnoty $\alpha = 66,4^\circ$. **4 body**

- b) Dosazením výsledku úlohy a) do (1) dostaneme

$$h = \frac{d v_0^2}{g d} - \frac{g d^2}{2 v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 d^2} \right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g d^2}{2 v_0^2} = 9,29 \text{ m.}$$

2 body

- c) Odchylku φ rychlosti dopadu od vodorovného směru určíme ze vztahu

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} &= \frac{v_0 \sin \alpha - g t}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Z toho plyne $\varphi = -(90^\circ - \alpha) = -23,6^\circ$.

4 body

Jiné řešení úloh a, b): Aby voda dopadla na stěnu do výšky h , musí $\operatorname{tg} \alpha$ splňovat kvadratickou rovnici získanou úpravou (1):

$$\frac{g d^2}{2 v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - d \operatorname{tg} \alpha + h = 0.$$

Z toho

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d \pm \sqrt{D}}{\frac{gd^2}{v_0^2}}, \quad \text{kde} \quad D = d^2 - \frac{4hgd^2}{2v_0^2} - \frac{4g^2d^4}{4v_0^4}$$

je diskriminant. Rovnice má řešení, jestliže

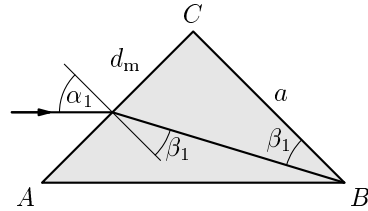
$$D \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}.$$

Největší výšky dosáhneme, když $D = 0$. Pak

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{d \pm 0}{\frac{gd^2}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gd}.$$

Poznámka: Ještě jednodušší řešení dostaneme užitím *ochranné paraboly* – viz studijní text *Vrhy*, knihovnička FO č. 56.

2. a)



Obr. R1

Paprsek v krajním případě dopadne do bodu B (obr. R1). Pak

$$d = d_m = a \operatorname{tg} \beta_1, \quad \sin \beta_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n},$$

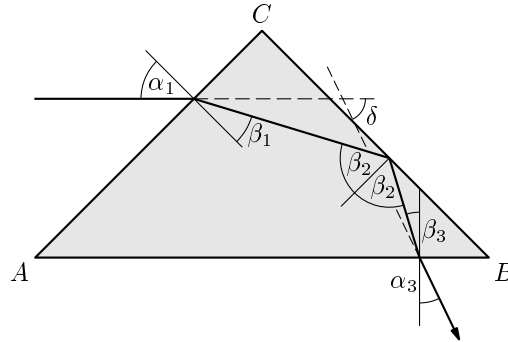
$$\beta_1 = 28,13^\circ, \quad d_m = 0,534a.$$

Vyhovují paprsky, pro které $d < d_m$.

2 body

- b) Paprsek dopadá na rozhraní BC pod úhlem $\beta_2 = 90^\circ - \beta_1 = 61,87^\circ$, který je větší než mezní úhel $\beta_m = \arcsin(1/n) = 41,81^\circ$. Nastane tedy úplný odraz a paprsek dopadá na rozhraní AB pod úhlem $\beta_3 = \beta_2 - 45^\circ = 16,87^\circ$, láme se a vystupuje z hranolu pod úhlem $\alpha_3 = \arcsin(n \sin \beta_3) = 25,81^\circ$ (obr. R2). Vystupující paprsek je od původního směru odchýlen o $\delta = 90^\circ - \alpha_3 = 64,19^\circ$.

3 body



Obr. R2

c,d) Vyřešíme nejprve podle obr. R3 obecnější úlohu d). Platí

$$\beta_1 < \beta_m, \quad \beta_2 = 90^\circ - \beta_1 > 48,09^\circ > \beta_m.$$

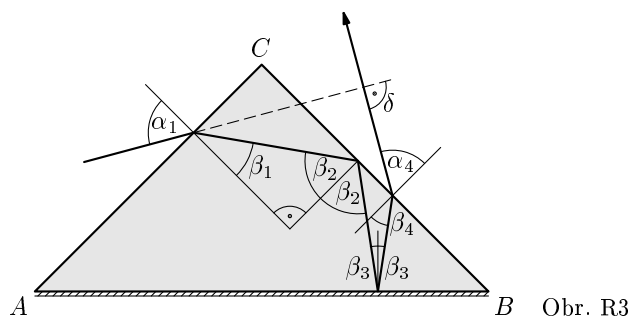
Na rozhraní BC určitě dojde k úplnému odrazu a paprsek dopadá na odraznou plochu AB pod úhlem $\beta_3 = \beta_2 - 45^\circ$. Pod stejným úhlem se odráží a vrací se na rozhraní BC , kam dopadá pod úhlem

$$\beta_4 = 45^\circ - \beta_3 = 45^\circ - (\beta_2 - 45^\circ) = 90^\circ - \beta_2 = \beta_1.$$

Z hranolu tedy vystupuje pod úhlem $\alpha_4 = \alpha_1$ a protože stěny AC a BC jsou navzájem kolmé, je vystupující paprsek kolmý k původnímu směru před dopadem na hranol.

Paprsek přicházející na hranol rovnoběžně s přeponou AB vystupuje z hranolu kolmo k přeponě.

5 bodů



3. a) K určení periody harmonických kmitů musíme vypočítat moment setrvačnosti kotouče J a směrný moment D (k tomu je třeba určit těžiště kruhové výseče).

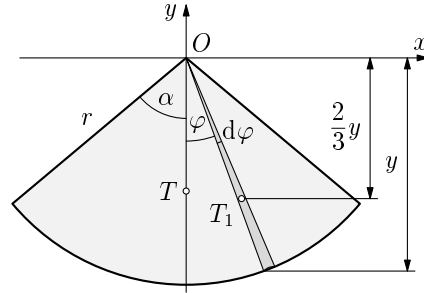
Moment setrvačnosti válce je $J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\varrho h\pi r^4$, kde h je výška válce. Výseče mají momenty setrvačnosti:

$$J_1 = \frac{1}{2}\varrho_1 h\pi r^4 \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\varrho_1 h r^4 \alpha, \quad J_2 = \frac{1}{2}\varrho_2 h\pi r^4 \frac{2\pi - 2\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\varrho_2 h r^4 (\pi - \alpha).$$

Moment setrvačnosti kotouče $J = J_1 + J_2 = \frac{1}{2}hr^4[\varrho_1\alpha + \varrho_2(\pi - \alpha)]$.

Vztah pro výpočet polohy těžiště kruhové výseče odvodíme z obr. R4:

$$\begin{aligned} y_T &= \int_S \frac{dS \cdot \frac{2}{3}y}{S} = \\ &= \int \frac{\frac{\pi r^2 d\varphi}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}r \cos \varphi\right)}{\pi r^2 \alpha} = \\ &= -\frac{r}{3\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = -\frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$



Obr. R4

Poznámka: Tento vzorec není nutno odvozovat, lze ho též nalézt v tabulkách.

První výseč: $y_{T1} = -\frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} r$. Druhá výseč: $y_{T2} = \frac{2}{3} \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\pi - \alpha} r = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} r$.

Směrný moment: $D = m_1 g |y_{T1}| - m_2 g y_{T2}$,

$$D = \frac{\pi r^2 2\alpha}{2\pi} h \varrho_1 g \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} r - \frac{\pi r^2 (2\pi - 2\alpha)}{2\pi} h \varrho_2 g \frac{2 \sin \alpha}{3(\pi - \alpha)} r = \frac{2}{3} r^3 h g (\varrho_1 - \varrho_2) \sin \alpha.$$

Doba kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{g} \frac{\varrho_1 \alpha + \varrho_2 (\pi - \alpha)}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{g} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\pi}{\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1\right) \sin \alpha} \right)}.$$

$$\text{Označme } \xi = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1, \quad \text{pak} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{g} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\pi}{\xi \sin \alpha} \right)}.$$

5 bodů

- b) Aby bylo T minimální, musí být minimální výraz pod odmocninou, tj. budeme hledat minimum funkce $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\pi}{\xi \sin \alpha}$:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\pi}{\xi \sin \alpha} \right) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\pi}{\xi} \cos \alpha \right) = 0,$$

$$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\pi}{\xi} \cos \alpha = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha - \alpha - \frac{\pi}{\xi} = 0,$$

což je transcendentní rovnice, kterou vyřešíme pouze pro dané hodnoty:

$$\xi = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1 = \frac{17}{9}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \frac{9\pi}{17}.$$

Pomocí numerických metod nebo graficky dostaneme

$$\alpha = 1,24 \text{ rad} = 71^\circ. \quad \text{Potom je } \alpha_1 = 2\alpha = 142^\circ, \quad \alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 = 218^\circ.$$

O tom, že se jedná o lokální minimum, se přesvědčíme pomocí druhé derivace funkce $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\pi}{\xi} \cos \alpha \right) \right] = \\ & = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\alpha + \frac{\pi}{\xi} \right) - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\pi}{\xi} \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Pro $\alpha = 1,24 \text{ rad}$ je $\frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} = 4,63 > 0$; nastává lokální minimum.

Dosazením zjištěné hodnoty úhlu α do vztahu pro výpočet periody dostaneme $T_{\min} \doteq 1,9 \text{ s}$.

5 bodů

4. a) Zákon zachování energie:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (1)$$

Zákon zachování hybnosti:

$$m_1v = m_1v_1 \cos \vartheta + m_2v_2 \cos \varphi \quad (2)$$

$$0 = m_1v_1 \sin \vartheta - m_2v_2 \sin \varphi \quad (3)$$

3 body

b) Upravíme (2) a (3):

$$m_2v_2 \cos \varphi = m_1v - m_1v_1 \cos \vartheta \quad (4)$$

$$m_2v_2 \sin \varphi = m_1v_1 \sin \vartheta \quad (5)$$

Sečtením $(4)^2 + (5)^2$ dostaneme

$$m_1^2v^2 - 2m_1^2v_1v \cos \vartheta + m_1^2v_1^2 = m_2^2v_2^2. \quad (6)$$

Z (1) vyjádříme $v_2^2 = \frac{m_1}{m_2}v^2 - \frac{m_1}{m_2}v_1^2$, dosadíme do (6). Po úpravě dostaneme:

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1v \cos \vartheta \cdot v_1 + (m_1 - m_2)v^2 = 0. \quad (7)$$

3 body

c) Dostali jsme kvadratickou rovnici, ze které můžeme vypočítat v_1 při známé odchylce ϑ . Úloha má řešení, je-li diskriminant rovnice nezáporný:

$$D = 4m_1^2v^2 \cos^2 \vartheta - 4(m_1 + m_2)(m_1 - m_2)v^2 \geq 0, \quad m_1^2 \cos^2 \vartheta - m_1^2 + m_2^2 \geq 0,$$

$$\cos^2 \vartheta \geq 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad \sin^2 \vartheta \leq \frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

Maximální odchylka částice α od původního směru je

$$\vartheta_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \doteq \arcsin 0,25 = 14,5^\circ.$$

4 body

5. a) Nejprve určíme počet N atomů izotopu $^{14}_6\text{C}$ v jednom gramu uhlíku v živých organismech. Jeho aktivita je

$$A = \frac{15,3}{60} \text{ Bq} = 0,255 \text{ Bq} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N,$$

kde λ je přeměnová konstanta a T je poločas přeměny. Po úpravě

$$N = \frac{AT}{\ln 2} = \frac{0,255 \text{ Bq} \cdot 3,16 \cdot 10^7 \cdot 5730 \text{ s}}{\ln 2} = 6,66 \cdot 10^{10}.$$

3 body

Celkový počet atomů v jednom gramu uhlíku je

$$N_c = \frac{m}{A_r m_u} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{12,011 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 5,02 \cdot 10^{22}.$$

Na jeden atom $^{14}_6\text{C}$ připadá $\frac{N_c}{N} = 7,54 \cdot 10^{11}$ atomů stabilních izotopů uhlíku.

2 body

- b) Rostliny přijímají radiouhlík $^{14}_6\text{C}$ z atmosféry při asimilaci CO_2 . Do těl živočichů se dostává s potravou. V atmosféře vzniká radiouhlík vlivem kosmického záření a jeho koncentrace je stálá. V odumřelých organismech se radiouhlík neobnovuje a jeho koncentrace se v důsledku radioaktivního rozpadu zmenšuje.

1 bod

- c) Od doby, kdy byl len na výrobu plátna sklizen a zpracován, uplynulo přibližně 1900 let. Během této doby poklesla aktivita radiouhlíku v plátně v poměru

$$\frac{A}{A_0} = 2^{-\frac{t}{T}} = 2^{-\frac{1900}{5730}} \doteq 0,79.$$

2 body

- d) Předpokládáme, že počáteční aktivita A_0 jednoho gramu uhlíku ve zkoumaném předmětu byla stejná jako u dnešních živých organismů. Dnešní aktivita je

$$A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Úpravou dostaneme

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{A_0}{A} = 3750 \text{ r}.$$

2 body

7. a) Pro adiabatický děj 1–2 platí:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \varepsilon^{\kappa-1},$$

$$\boxed{T_2 = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}, \quad p_2 = p_1 \varepsilon^\kappa.}$$

Pro izobarický děj 2–3 platí: $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \varphi$,

$$\boxed{T_3 = T_2 \varphi = T_1 \varepsilon^{\kappa-1} \varphi, \quad p_3 = p_2 = p_1 \varepsilon^\kappa.}$$

Pro adiabatický děj 3–4 platí:

$$p_3 V_3^\kappa = p_4 V_4^\kappa, \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \varphi^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}},$$

$$T_4 = T_3 \varphi^{\kappa-1} \varepsilon^{1-\kappa} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1} \varphi \cdot \varepsilon^{1-\kappa} \varphi^{\kappa-1}, \quad \boxed{T_4 = T_1 \varphi^\kappa,}$$

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\kappa = p_3 \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa \varphi^\kappa \varepsilon^{-\kappa}, \quad \boxed{p_4 = p_1 \varphi^\kappa.}$$

Pro dané hodnoty:

$T_1 = 300 \text{ K}$, $T_2 = 953 \text{ K}$, $T_3 = 2383 \text{ K}$, $T_4 = 1082 \text{ K}$,
 $(t_1 = 27 \text{ °C}$, $t_2 = 680 \text{ °C}$, $t_3 = 2110 \text{ °C}$, $t_4 = 809 \text{ °C})$,
 $p_1 = 0,100 \text{ MPa}$, $p_2 = p_3 = 5,72 \text{ MPa}$, $p_4 = 0,361 \text{ MPa}$.

3 body

b) Hmotnost vzduchu, který projde pracovním prostorem válce během jednoho cyklu, můžeme vyjádřit pomocí stavové rovnice:

$$m = \frac{p_1 V_1 M_m}{R T_1}. \quad \text{Z toho plyne: } m c_V = 2,5 \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Během hoření paliva při ději 2–3 přijme pracovní látka teplo

$$Q_1 = m c_p (T_3 - T_2) = m \kappa c_V (T_3 - T_2) = 2,5 \kappa \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_3 - T_2).$$

Při izochorickém ději 4–1 odevzdá pracovní látka teplo

$$Q_2' = m c_V (T_4 - T_1) = 2,5 \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_4 - T_1).$$

Ostatní děje jsou adiabatické, tedy bez tepelné výměny. Celková práce při jednom cyklu je $W' = Q_1 - Q_2'$. Motor pracuje s teoretickou účinností

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Pro dané hodnoty:

$Q_1 = 801 \text{ J}$, $Q_2' = 313 \text{ J}$, $W' = 488 \text{ J}$, $\eta = 61 \%$.

3 body

- c) Klikový hřídel se otáčí s frekvencí $f = 3000/(60 \text{ s}) = 50 \text{ s}^{-1}$. U čtyřválcového motoru připadají na dvě otočení klikového hřídele 4 celé cykly. Výkon motoru je

$$P = 2fW' = 49 \text{ kW}.$$

2 body

- d) Do vztahu pro účinnost odvozeného v úloze b) dosadíme vztahy mezi teplotami odvozené v části a):

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\varphi^{\kappa} - 1}{\varepsilon^{\kappa-1} \varphi - \varepsilon^{\kappa-1}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\kappa} - 1}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

2 body