**Úlohy 1. kola 45. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie A*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

**1.** Proudem vody tryskajícím ze zahradní hadice počáteční rychlostí o velikosti $v_0$ chceme dostříknout co nejvýše na svislou stěnu, která se nachází ve vodorovné vzdálenosti $d$ od ústí hadice.

a) Jak velký elevační úhel $\alpha$ musíme zvolit?

b) Do jaké výšky $h$ nad ústí hadice voda dostříkne?

c) Pod jakým úhlem $\varphi$ dopadne voda na stěnu? (Určete odchylku vektoru okamžité rychlosti v okamžiku dopadu od vodorovného směru.)

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $v_0 = 15{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $d = 10{,}0$ m. Odpor vzduchu zanedbejte.

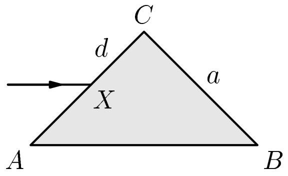
**2.** Trojúhelník $ABC$ je kolmým řezem pravoúhlého rovnoramenného optického hranolu vyrobeného ze skla o indexu lomu $n = 1{,}50$. Odvěsna trojúhelníka má délku $a$.

a) Světelný paprsek rovnoběžný s přeponou $AB$ dopadá na stěnu $AC$ do bodu $X$ (obr. 1a) . Jakou podmínku splňuje vzdálenost $d = |XC|$, jestliže paprsek po lomu na rozhraní $AC$ dopadá na rozhraní $BC$?

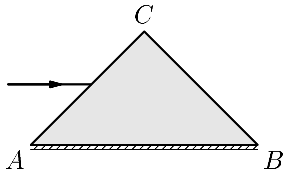
b) Jakou odchylku od původního směru bude mít tento paprsek při výstupu z hranolu?

c) Na stěnu $AB$ napaříme odraznou kovovou vrstvu a dostaneme tzv. *Bauernfieldův odrazný hranol* (obr. 1b). Na hranol vyšleme stejný světelný paprsek jako v úloze a). Jakou odchylku od původního směru bude mít při výstupu z hranolu?

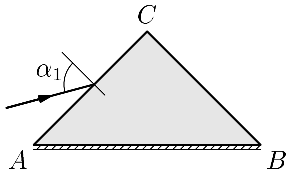
d) Nyní změníme úhel $\alpha_1$ dopadu na rozhraní $AC$, ale paprsek opět po lomu na rozhraní $AC$ dopadne na rozhraní $BC$ (obr. 1c). Jak se změní odchylka paprsku od směru před dopadem?




Obr. 1a




Obr. 1b



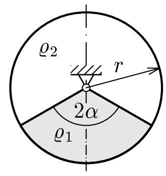

Obr. 1c

**3.** Kyvadlo je tvořeno válcovým kotoučem o poloměru $r = 0{,}100$ m, složeným ze dvou výsečí o hustotách $\varrho_1 = 7\,800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\varrho_2 = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Středový úhel výseče o hustotě $\varrho_1$ je $2\alpha$ (obr. 2). Osa kotouče je vodorovná. Kyvadlo rozkmitáme s malou amplitudou úhlové výchylky.

a) Určete obecně periodu kmitů $T = T(r, \varrho_1, \varrho_2, \alpha)$.

b) Pro dané hodnoty $r$, $\varrho_1$ a $\varrho_2$ určete středový úhel $2\alpha$, při kterém je perioda kmitů minimální, a vypočtěte tuto periodu $T_{\min}$. Transcendentní rovnici, kterou dostanete, řešte numerickými metodami nebo graficky.

Těžiště kruhové výseče o poloměru $r$ se středovým úhlem $2\alpha$ leží ve vzdálenosti $(2r \sin\alpha)/(3\alpha)$ od středu kružnice.



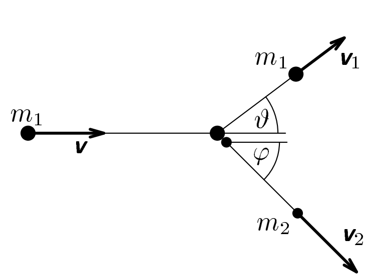
Obr. 2

**4.** Částice $\alpha$ vletí do komory plněné vodíkem. Při pružné srážce s jádrem vodíku – – protonem – se změní směr její rychlosti.

a) Sestavte rovnice, které pro tuto srážku vyjadřují zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie. Označení veličin volte podle obr. 3.

b) Z těchto rovnic vyloučením některých veličin odvoďte vztah mezi velikostí $v$ rychlosti částice $\alpha$ před srážkou, velikostí $v_1$ rychlosti částice $\alpha$ po srážce a odchylkou $\vartheta$ od původního směru.

c) Rozborem odvozeného vztahu určete maximální velikost úhlu $\vartheta$, jestliže hmotnost částice $\alpha$ je přibližně čtyřnásobkem hmotnosti protonu.



Obr. 3

Rychlost částice $\alpha$ před srážkou je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu. Rychlost protonu před srážkou je ve srovnání s rychlostí částice $\alpha$ zanedbatelná.

**5.** V jednom gramu uhlíku v živých organismech proběhne za minutu průměrně 15,3 rozpadů radioizotopu ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Poločas rozpadu tohoto radionuklidu je 5730 let.

a) Kolik atomů stabilních izotopů uhlíku připadá v živých organismech na jeden atom ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$?

b) Proč je v archeologických vykopávkách měrná aktivita uhlíku menší?

c) Kolikrát menší měrnou aktivitu vykazoval uhlík ve lněné tkanině, ve které byl zabalen rukopis Bible nalezený na břehu Mrtvého moře, pocházející ze začátku 2. století našeho letopočtu?

d) Jaké je stáří archeologického nálezu, ve kterém 1 gram uhlíku vykazuje aktivitu 0,162 Bq?

Relativní atomová hmotnost uhlíku je $A_r = 12{,}011$.

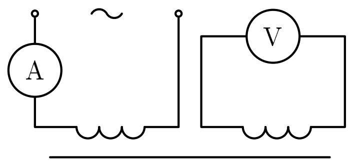
**6.** *Praktická úloha:* **Měření vzájemné indukčnosti**

*Teorie:* V cívce o indukčnosti $L$ vznikne při průchodu proudu $i$ celkový magnetický tok (součet magnetických toků všech závitů) $\Phi_c = Li$. Mějme dvě cívky o indukčnostech $L_1$ a $L_2$ umístěné tak, aby magnetické pole první cívky zasahovalo do závitů druhé cívky a naopak. Prochází-li první cívkou proud $i_1$, vznikne v druhé cívce magnetický tok $\Phi_{12} = M_{12}i_1$ a naopak, jestliže druhou cívkou prochází proud $i_2$, vznikne v první cívce magnetický tok $\Phi_{21} = M_{21}i_2$. Dá se dokázat, že platí $M_{12} = M_{21} = M$. Veličina $M$ se nazývá *vzájemná indukčnost* cívek.

*Úkol:* Určete vzájemnou indukčnost dvou cívek z rozkladného transformátoru o 600 a 1200 závitech, které jsou navléknuty na dlouhém rovném jádru a vzájemně se dotýkají.

*Provedení úlohy:*

*1. způsob:* Do první cívky přivedeme přes ampérmetr střídavý proud o frekvenci 50 Hz ze síťového transformátoru a k druhé cívce připojíme voltmetr (obr. 4). Změny proudu v první cívce indukují v druhé cívce napětí. Platí



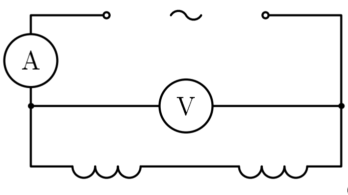
Obr. 4

$$\Phi_2 = Mi_1 = MI_{1\mathrm{m}} \sin \omega t\,,$$

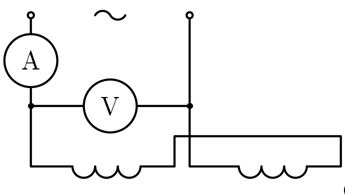
$$u_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -MI_{1\mathrm{m}}\omega \cos \omega t = -U_{2\mathrm{m}} \cos \omega t\,,$$

$$M = \frac{U_{2\mathrm{m}}}{\omega I_{1\mathrm{m}}} = \frac{U_2}{\omega I_1}\,,$$

kde $U_2$ a $I_1$ jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, které přečteme na měřicích přístrojích. Primární cívku volte a) s 600 závity, b) s 1200 závity. Každé měření proveďte pětkrát při různých hodnotách proudu. Jako zdroj proudu použijte síťový transformátor s odbočkami na sekundárním vinutí nebo regulujte proud reostatem. Nepřekročte maximální hodnoty proudu vyznačené na cívkách.



Obr. 5



Obr. 6

*2. způsob:* Sériovým spojením obou cívek dostaneme jedinou cívku o indukčnosti $L_\mathrm{A} = L_1 + L_2 + 2M$ (obr. 5), nebo o indukčnosti $L_\mathrm{B} = L_1 + L_2 - 2M$ (obr. 6). V obou případech má výsledná cívka také rezistanci rovnou součtu $R_1 + R_2$ odporů obou vinutí a pro její impedanci a indukčnost platí

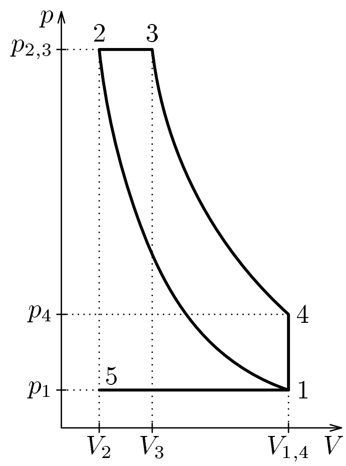
$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\omega^2 L^2 + (R_1 + R_2)^2}\,, \qquad L = \frac{\sqrt{Z^2 - (R_1 + R_2)^2}}{\omega}\,.$$

Měřením podle obr. 5 a 6 určíme $L_{\mathrm{A}}$ a $L_{\mathrm{B}}$. Pak $M = \dfrac{L_{\mathrm{A}} - L_{\mathrm{B}}}{4}$.

Také měření podle obr. 5 a 6 proveďte pětkrát při různých hodnotách proudu. Odpory vinutí $R_1$ a $R_2$ změřte ohmmetrem nebo pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu stejnosměrného proudu.

Výsledky získané oběma způsoby porovnejte.

**7.** Činnost čtyřdobého vznětového (*Dieselova*) motoru můžeme modelovat kruhovým dějem, jehož $p$-$V$ diagram je na obr. 7. Motor pracuje tak, že do vzduchu, který byl zahřát na vysokou teplotu adiabatickou kompresí 1–2, se při expanzi po krátkou dobu vstřikuje palivo, které izobaricky hoří 2–3, načež se plyn dále rozpíná adiabaticky 3–4 a nakonec opustí pracovní prostor a je nahrazen novým vzduchem 4–1–5–1. Poslední část pracovního cyklu je ekvivalentní izochorickému ději 4–1. Podíl $\varepsilon = V_1/V_2$ se nazývá *kompresní poměr* a podíl $\varphi = V_3/V_2$ je *plnicí poměr* motoru. Změnou plnicího poměru regulujeme výkon motoru.



Obr. 7

U vznětového motoru osobního automobilu je $V_1 = 480\ \mathrm{cm}^3$ a $\varepsilon = 18$. Při tlaku okolního vzduchu $p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, teplotě $T_1 = 300$ K a plnicím poměru $\varphi = 2{,}5$ určete:

a) hodnoty stavových veličin $p$, $T$ v bodech 2, 3 a 4 pracovního diagramu,

b) teplo $Q_1$ přijaté a teplo $Q_2'$ odevzdané pracovní látkou během jednoho cyklu, celkovou práci $W'$ při jednom cyklu a teoretickou účinnost cyklu,

c) celkový výkon čtyřválcového motoru, jestliže klikový hřídel vykoná 3 000 otáček za minutu.

d) Dokažte, že pro teoretickou účinnost tohoto motoru platí vztah

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa} - 1}{\varphi - 1}\,.$$

Předpokládáme, že vzduch a produkty hoření se chovají jako ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pro který platí stavová rovnice. Měrná tepelná kapacita takového plynu je $c_V = 2{,}5R/M_{\mathrm{m}}$, kde $R$ je molární plynová konstanta a $M_{\mathrm{m}}$ je molární hmotnost plynu. Pro adiabatické děje platí *Poissonův zákon* $pV^{\varkappa} = \mathrm{konst}$, kde $\varkappa = c_p/c_V$ je Poissonova konstanta. V našem případě $\varkappa = 1{,}40$.