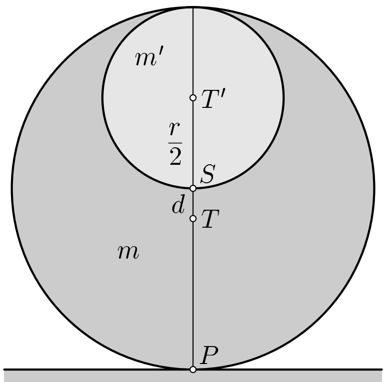
Řešení úloh celostátního kola 45. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: M. Randa (1), L. Richterek (3), B. Vybíral (2,4)
Konečná úprava: P. Šedivý

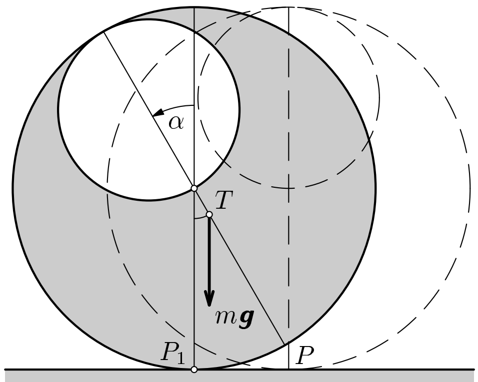
1. a) Naše těleso vzniklo z plného válce o hmotnosti $m_0 = \varrho h \pi r^2$ odebráním válce o hmotnosti $m' = \varrho h \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{m_0}{4}$, kde h je výška válce a ϱ je hustota materiálu (obr. R1). Hmotnost tělesa je tedy $m = \frac{3}{4} m_0$. Nechť T je těžiště našeho tělesa a T' těžiště odebraného válce a d vzdálenost těžiště T od středu S původního plného válce. Platí

$$\frac{d}{\frac{r}{2}} = \frac{m'}{m} = \frac{\frac{m_0}{4}}{\frac{3m_0}{4}} = \frac{1}{3}\,, \qquad d = \frac{r}{6}\,.$$

2 body



Obr. R1



Obr. R2

b) Použijeme vztah pro výpočet momentu setrvačnosti plného válce a Steinerovu větu. Pro moment setrvačnosti vzhledem k ose P platí

$$J = \frac{1}{2} m_0 r^2 + m_0 r^2 - \frac{1}{2} m' \left(\frac{r}{2}\right)^2 - m' \left(\frac{3r}{2}\right)^2 = \frac{29}{32} m_0 r^2 = \frac{29}{24} m r^2\,.$$

2 body

c) Vychýlíme-li těleso z rovnovážné polohy tak, že se pootočí o malý úhel α, posune se okamžitá osa rotace z polohy P do polohy P_1, přičemž $|PP_1| = r\alpha$ (obr. R2). Vzhledem k této ose působí tíhová síla momentem

$$M = -mgd \sin\alpha = -\frac{mgr\sin\alpha}{6}$$

namířeným proti úhlové výchylce. Pohybová rovnice otáčivého pohybu okolo okamžité osy rotace v P_1 je $M = J_1\varepsilon$, kde ε je okamžité úhlové zrychlení a J_1 je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose v P_1. Pro malou úhlovou výchylku je

$$\sin\alpha \approx \alpha\,, \qquad J_1 \approx J$$

a pohybovou rovnici můžeme psát ve tvaru

$$-\frac{mgr}{6}\alpha = \frac{29}{24}mr^2\varepsilon\,, \quad \text{nebo} \quad \varepsilon = -\frac{4g}{29r}\alpha\,. \tag{1}$$

3 body

d) Pohybová rovnice valivého pohybu (1) je analogická k pohybové rovnicí harmonických kmitů pružinového oscilátoru

$$F = ma = -ky\,, \qquad a = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y\,.$$

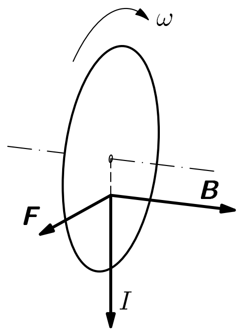
Pro malé kmity našeho tělesa tedy platí

$$\omega^2 = \frac{4g}{29r}\,, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{29r}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{29r}{g}}\,.$$

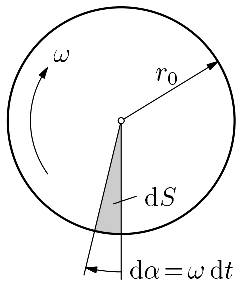
3 body

2. a) Flemingovým pravidlem levé ruky určíme, že kotouč se bude při pohledu od jižního pólu magnetu k pólu severnímu otáčet ve směru hodinových ručiček (obr. R3).

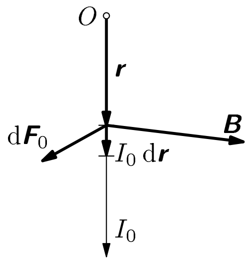
1 bod



Obr. R3



Obr. R4



Obr. R5

b) Otáčí-li se kotouč v magnetickém poli, vzniká v něm indukované elektrické pole. Indukované napětí bude (viz studijní text, čl. 1.3 – Faradayův kotouč):

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}B\omega r_0^2\,,$$

neboť podle obr. R4

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r_0^2\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}r_0^2\omega\,\mathrm{d}t\,.$$

Indukované napětí je namířeno proti elektromotorickému napětí zdroje. V mezním případě rotace úhlovou rychlostí ω_m by se obě napětí vyrovnala a obvodem by neprocházel proud:

$$U_\mathrm{e} + U_\mathrm{i} = 0 \quad\Rightarrow\quad U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}B\omega_\mathrm{m}r_0^2 \quad\Rightarrow\quad \omega_\mathrm{m} = \frac{2U_\mathrm{e}}{Br_0^2} = 521\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$

Mezní úhlová rychlost zřejmě nezávisí na odporu obvodu, je tedy stejná pro odpor R_1 i R_2.

3 body

c) Počáteční úhlové zrychlení ε_0 je dáno pohybovou rovnicí pro $\omega = 0$, kdy se ještě v kotouči neindukuje napětí. Platí

$$M_0 = J\varepsilon_0\,,$$

kde M_0 je velikost počátečního momentu magnetických sil působících na kotouč, když obvodem prochází počáteční proud $I_0 = U_\mathrm{e}/R$. Určíme jej integrací elementárních momentů síly $\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_0$ o velikosti $BI_0 r\,\mathrm{d}r$ (obr. R5). Pak

$$M_0 = BI_0\int_0^{r_0} r\,\mathrm{d}r = \frac{BI_0r_0^2}{2} = \frac{BU_\mathrm{e}r_0^2}{2R}\,.$$

Počáteční úhlové zrychlení je

$$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{J} = \frac{BU_\mathrm{e} r_0^2}{2RJ} \,.$$

Pro $R = R_1$ dostaneme $\varepsilon_{01} = 11{,}5\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$,
pro $R = R_2$ dostaneme $\varepsilon_{02} = 5{,}76\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

2 body

d) Při rotaci se bude v kotouči indukovat napětí U_i (viz bod b), které je namířeno proti napětí U_e. Obvodem bude procházet proud $I < I_0$:

$$I = \frac{U_\mathrm{e} + U_\mathrm{i}}{R} = \frac{1}{R}\left(U_\mathrm{e} - \frac{Br_0^2\omega}{2}\right)$$

a v souladu s odvozením v bodě c) bude na kotouč působit menší hnací moment síly

$$M = \frac{BIr_0^2}{2} = \frac{Br_0^2}{2R}\left(U_\mathrm{e} - \frac{Br_0^2\omega}{2}\right) \,.$$

Pohybová rovnice pak je

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{Br_0^2}{2R}\left(U_\mathrm{e} - \frac{Br_0^2\omega}{2}\right) = \frac{B^2r_0^4}{4R}\left(\frac{2U_\mathrm{e}}{Br_0^2} - \omega\right) = \frac{B^2r_0^4}{4R}(\omega_\mathrm{m} - \omega) \,,$$

kde ω_m je mezní úhlová rychlost. Provedeme separaci proměnných a integraci:

$$\int\limits_0^\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_\mathrm{m} - \omega} = -\ln\frac{\omega_\mathrm{m} - \omega}{\omega_\mathrm{m}} = \frac{B^2r_0^4}{4RJ}t \,, \qquad \frac{\omega_\mathrm{m} - \omega}{\omega_\mathrm{m}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_\mathrm{m}} = \mathrm{e}^{-\frac{B^2r_0^4}{4RJ}t} \,,$$

$$\omega = \omega_\mathrm{m}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2r_0^4}{4RJ}t}\right) = \frac{2U_\mathrm{e}}{Br_0^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2r_0^4}{4RJ}t}\right) \,.$$

V čase $t = 10$ s pro $R = R_1$ dostaneme $\omega_1 = 103\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$,
pro $R = R_2$ dostaneme $\omega_2 = 54{,}5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

4 body

3. a) Vyjdeme ze zákonů zachování relativistické hybnosti a relativistické energie

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{K}} = \boldsymbol{p}_{\pi^+} + \boldsymbol{p}_{\pi^0}\,, \qquad E_{\mathrm{K}} = E_{\pi^+} + E_{\pi^0}\,. \tag{1}$$

V soustavě, ve které je rozpadající se mezon K^+ v klidu, platí $p_{\mathrm{K}} = 0$ a energie mezonu K^+ je rovna klidové energii $E_{\mathrm{K}} = m_{\mathrm{K}}c^2$. Oba zákony lze proto přepsat do tvaru

$$-\boldsymbol{p}_{\pi^+} = \boldsymbol{p}_{\pi^0}\,, \tag{2}$$

$$m_{\mathrm{K}}c^2 - E_{\pi^+} = E_{\pi^0}\,. \tag{3}$$

2 body

Vynásobíme-li rovnici (2) rychlostí světla c a umocníme obě rovnice na druhou, dostáváme

$$c^2 p_{\pi^+}^2 = c^2 p_{\pi^0}^2\,, \tag{4}$$

$$m_{\mathrm{K}}^2 c^4 - 2m_{\mathrm{K}}c^2 E_{\pi^+} + E_{\pi^+}^2 = E_{\pi^0}^2\,. \tag{5}$$

Odečtení první rovnice (4) od (5) vede ke vztahu

$$m_{\mathrm{K}}^2 c^4 - 2m_{\mathrm{K}}c^2 E_{\pi^+} + \underbrace{E_{\pi^+}^2 - c^2 p_{\pi^+}^2}_{m_{\pi^+}^2\,c^4} = \underbrace{E_{\pi^0}^2 - c^2 p_{\pi^0}^2}_{m_{\pi^0}^2\,c^4}\,.$$

Vyjádříme-li z poslední rovnice E_{π^+}, vychází

$$E_{\pi^+} = c^2\,\frac{m_{\mathrm{K}}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_{\mathrm{K}}} \doteq 250{,}1\ \mathrm{MeV}\,. \tag{6}$$

Velikost v_{π^+} rychlosti mezonu najdeme z jeho celkové energie E_{π^+}, neboť platí

$$E_{\pi^+} = \frac{m_{\pi^+}\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_{\pi^+}^2}{c^2}}}\,.$$

Vyjádříme-li v_{π^+} a dosadíme-li za E_{π^+} z (6), dostáváme

$$v_{\pi^+} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\pi^+}\,c^2}{E_{\pi^+}}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m_{\mathrm{K}}m_{\pi^+}}{m_{\mathrm{K}}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}\right)^2} \doteq 0{,}83\,c\,.$$

Číselně $v_{\pi^+} \doteq 2{,}49 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Vzhledem k symetrii rovnic (1) odvodíme další vztahy záměnou indexů.

$$E_{\pi^0} = c^2\,\frac{m_{\mathrm{K}}^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{2m_{\mathrm{K}}} \doteq 247{,}6\ \mathrm{MeV}\,,$$

$$v_{\pi^0} = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m_{\mathrm{K}}m_{\pi^0}}{m_{\mathrm{K}}^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2}\right)^2} \doteq 0{,}84\,c\,.$$

Číselně $v_{\pi^0} \doteq 2{,}51 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4 body

b) Celková energie obou mezonů v inerciální vztažné soustavě S′ spojené s mezonem π^0 je $E'_{\pi^+} + m_{\pi^0}c^2$ a celková hybnost obou mezonů v soustavě S′ je $\boldsymbol{p}'_{\pi^+}$. Před rozpadem měl mezon K^+ ve vztažné soustavě S, ve které byl v klidu, pouze klidovou energii $m_K c^2$ a nulovou hybnost. Vzhledem k invariantnosti veličiny $E^2 - p^2c^2$ pro libovolný hmotný objekt platí

$$(E'_{\pi^+} + m_{\pi^0}c^2)^2 - p'^2_{\pi^+}c^2 = m_K^2 c^4 . \qquad (7)$$

Současně platí

$$E'^2_{\pi^+} - p'^2_{\pi^+}c^2 = m^2_{\pi^+}c^4 . \qquad (8)$$

Odečtením obou rovnic (7), (8) a úpravou dostaneme:

$$m^2_{\pi^0}c^4 + 2m_{\pi^0}c^2E'_{\pi^+} = m_K^2c^4 - m^2_{\pi^+}c^4 ,$$

$$E'_{\pi^+} = \frac{(m_K^2 - m^2_{\pi^+} - m^2_{\pi^0})c^2}{2m_{\pi^0}} = 778\ \mathrm{MeV} .$$

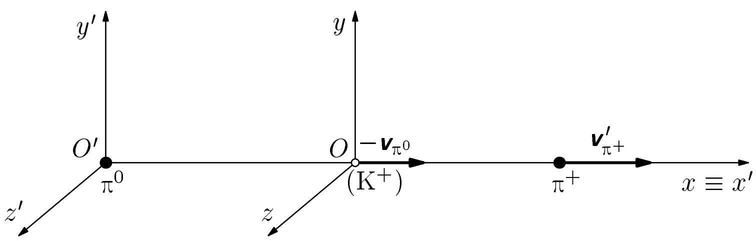
Velikost v'_{π^+} rychlosti mezonu π^+ vzhledem k mezonu π^0 určíme podobně jako v úloze a):

$$v'_{\pi^+} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\pi^+}c^2}{E'^2_{\pi^+}}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m_{\pi^0}m_{\pi^+}}{m_K^2 - m^2_{\pi^+} - m^2_{\pi^0}}\right)^2} \doteq 0{,}984\,c .$$

Číselně $v'_{\pi^+} \doteq 2{,}95 \cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **4 body**

Jiné řešení úkolu b):

Podle principu relativity se inerciální vztažná soustava S = $Oxyz$, ve které byl mezon K^+ před rozpadem v klidu, pohybuje vzhledem k inerciální vztažné soustavě S′ = $O'x'y'z'$ spojené po rozpadu s mezonem π^0 rychlostí $-\boldsymbol{v}_{\pi^0}$ (obr. R6 – kresleno z hlediska pozorovatele v soustavě S′).



Obr. R6

Podle relativistického zákona skládání rychlostí musí platit

$$v'_{\pi^+} = \frac{v_{\pi^0} + v_{\pi^+}}{1 + \dfrac{v_{\pi^0}v_{\pi^+}}{c^2}} \doteq 0{,}984\,c \doteq 2{,}95 \cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} .$$

Pro celkovou energii E'_{π^+} mezonu π^+ ve vztažné soustavě S′ pak vychází

$$E'_{\pi^+} = \frac{m_{\pi^+}c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2_{\pi^+}}{c^2}}} \doteq 778\ \mathrm{MeV} .$$

4. a) V úloze musíme počítat s absolutními teplotami $T_1 = 293{,}15$ K, $T_2 = 393{,}15$ K. Podle Stefanova-Boltzmannova zákona povrchy vyzařují s intenzitami

$$M_{e1} = \sigma T_1^4 , \qquad M_{e2} = \sigma T_2^4 .$$

Celkový zářivý tok mezi povrchy je

$$\Phi_{e0} = (M_{e2} - M_{e1})S = S\sigma(T_2^4 - T_1^4)$$

a z teplejšího povrchu na studenější přejde teplo

$$Q_0 = \Phi_{e0}\,\tau = \sigma S\tau(T_2^4 - T_1^4) = 1{,}12 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

3 body

b) Zářivý tok Φ_e ve všech mezerách musí být stejný (viz obr. R7):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_e &= \sigma S(T_2^4 - T_5^4) \\ \Phi_e &= \sigma S(T_5^4 - T_4^4) \\ \Phi_e &= \sigma S(T_4^4 - T_3^4) \\ \Phi_e &= \sigma S(T_3^4 - T_1^4) \end{aligned}\right\} \quad 4\Phi_e = \sigma S(T_2^4 - T_1^4) = \Phi_{e0} .$$

Zářivý tok se zmenší na $\Phi_e = \Phi_{e0}/4$, tedy čtyřikrát. Za dobu τ přejde z teplejšího povrchu na studenější teplo $Q = Q_0/4 = 2{,}80 \cdot 10^4$ J.

4 body

c) Řešením soustavy rovnic

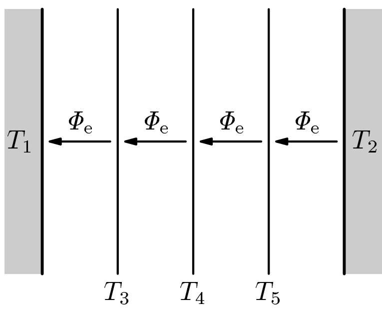
$$T_2^4 - T_1^4 = 4(T_2^4 - T_5^4) , \qquad T_2^4 - T_1^4 = 4(T_3^4 - T_1^4) , \qquad T_2^4 - T_1^4 = 4(T_4^4 - T_3^4)$$

dostaneme

$$T_5 = \sqrt[4]{\frac{3T_2^4 + T_1^4}{4}} = 375 \text{ K} , \qquad T_3 = \sqrt[4]{\frac{T_2^4 + 3T_1^4}{4}} = 328 \text{ K} ,$$

$$T_4 = \sqrt[4]{\frac{T_2^4 + T_1^4}{2}} = 354 \text{ K} , \qquad t_5 = 102\ ^\circ\text{C} , \quad t_3 = 54\ ^\circ\text{C} , \quad t_4 = 80\ ^\circ\text{C} .$$

3 body



Obr. R7