Řešení úloh regionálního kola 45. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: M. Randa (1, 2), P. Mazanec (3), M. Jarešová (4)

Konečná úprava: P. Šedivý

1. a) Užitím vzorce $p_\mathrm{s} = At^2 + Bt + C$ určíme tlak sytých par při teplotě $t = 30\ ^\circ\mathrm{C}$: $p_\mathrm{s} = 4\,240$ Pa.

1 bod

Za uvedených podmínek mají vodní páry ve vzduchu parciální tlak

$$p_\mathrm{p} = \varphi p_\mathrm{s} = 2417\ \mathrm{Pa} \doteq 2420\ \mathrm{Pa}\,.$$

Jejich hustotu a tedy i absolutní vlhkost vzduchu určíme užitím stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M_\mathrm{m}}R \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM_\mathrm{m}}{RT}\,,$$

$$\varrho_\mathrm{p} = \frac{M_\mathrm{p}p_\mathrm{p}}{RT} = 0{,}017\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,.$$

3 body

b) Samotný vzduch bez vodní páry má za daných podmínek parciální tlak a hustotu

$$p_\mathrm{v} = p - p_\mathrm{p} = 97\,580\ \mathrm{Pa} \qquad \varrho_\mathrm{v} = \frac{M_\mathrm{v}(p - p_\mathrm{p})}{RT} = 1{,}121\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,.$$

Celková hustota vzduchu s vodní párou je

$$\varrho = \varrho_\mathrm{v} + \varrho_\mathrm{p} = 1{,}139\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,.$$

Suchý vzduch o dané teplotě t a tlaku p by měl hustotu

$$\varrho_0 = \frac{M_\mathrm{v}p}{RT} = 1{,}149\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,,$$

tedy o $0{,}010\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ větší než vzduch vlhký.

3 body

c) Teplotu rosného bodu, při které by vodní pára o daném parciálním tlaku byla sytá, určíme řešením kvadratické rovnice $At^2 + Bt + C = p_\mathrm{p}$. Úloze vyhovuje kořen

$$t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A(C - p_\mathrm{p})}}{2A} \doteq 21\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

3 body

2. a) Perioda mechanických kmitů vodiče je $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}} = 1{,}22\ \mathrm{s}$. **1,5 bodu**

b) Při vybíjení kondenzátoru prochází vodorovným vodičem proud zleva doprava a na vodič působí podle Flemingova pravidla levé ruky směrem dolů magnetická síla o velikosti $F_\mathrm{m} = BIl$, kde I je okamžitá hodnota proudu. Změna hybnosti vodiče za velmi krátkou dobu Δt má velikost

$$m\Delta v = F_\mathrm{m}\Delta t = BIl\Delta t = Bl\Delta Q\,,$$

kde ΔQ je úbytek náboje na kondenzátoru za uvažovanou dobu Δt. Během úplného vybití kondenzátoru získá vodorovný vodič hybnost $mv_0 = BlQ = BlCU$. Počáteční rychlost kmitavého pohybu bude směřovat dolů a bude mít velikost

$$v_0 = \frac{BlUC}{m} = 0{,}28\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$ **4 body**

Vodorovný vodič získá kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{B^2l^2U^2C^2}{2m} = 0{,}0059\ \mathrm{J}$, která je nepatrná ve srovnání s energií nabitého kondenzátoru

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = 125\ \mathrm{J}\,.$$

Téměř celá energie kondenzátoru se při jeho vybití spotřebuje na Joulovo teplo. **1,5 bodu**

c) Amplitudu kmitů je $y_\mathrm{m} = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{v_0}{\sqrt{\dfrac{2k}{m}}} = \dfrac{BlCU}{\sqrt{2km}} = 5{,}4\ \mathrm{cm}$.

1,5 bodu

d) Protože kmitavý pohyb vodorovného vodiče začíná z rovnovážné polohy směrem dolů, má rovnice okamžité výchylky tvar

$$y = -y_\mathrm{m}\sin(\omega t) = -\frac{BlCU}{\sqrt{2km}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot t\right)\,.$$

Pro číselné hodnoty platí $\{y\} = -5{,}4\cdot 10^{-2}\sin(5{,}2\{t\})$.

1,5 bodu

Poznámka: Zanedbali jsme fakt, že vodorovný vodič se při kmitání v magnetickém poli stává zdrojem střídavého napětí o amplitudě

$$U_\mathrm{m} = Blv_0 = 0{,}024\ \mathrm{V},$$

ke kterému zůstal připojen kondenzátor. Ten má při nízké frekvenci kmitů značnou kapacitní reaktanci a obvodem prochází jen velmi malý střídavý proud o amplitudě

$$I_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/X_C = Blv_0\omega C = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{A},$$

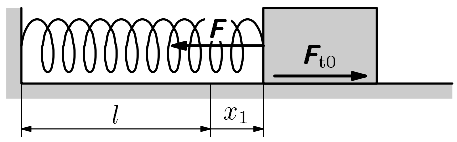
který předbíhá napětí o čtvrtinu periody. Na vodorovný vodič tedy působí kromě tíhové síly a síly pružin ještě síla magnetická, která je přímo úměrná okamžité výchylce a je v souladu s Lenzovým zákonem namířena směrem od rovnovážné polohy. Tato proměnná síla má však jen nepatrnou amplitudu

$$F_\mathrm{m} = BlI_\mathrm{m} = 1{,}0\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$

a můžeme ji zanedbat.

3. a) V nové poloze musí být velikost síly statického tření $\boldsymbol{F}_{t0}$ větší nebo rovna velikosti síly $\boldsymbol{F}$, kterou na kvádr působí natažená nebo stlačená pružina (obr. R1):

$$F_{t0} \geq F\,, \qquad mgf_0 \geq kx \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{mgf_0}{k} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{mgf_0}{k} = 2{,}7\ \mathrm{cm}\,.$$



Obr. R1 **2 body**

b) Stav před uvolněním kvádru a stav při stlačení pružiny po uvolnění kvádru jsou znázorněny na obr. R2. Podle zákona zachování energie je počáteční potenciální energie elastická E_1 natažené pružiny rovna součtu potenciální energie elastické E_2 stlačené pružiny a práce W spotřebované třecí silou:

$$E_1 = E_2 + W\,, \qquad \frac{1}{2}k(2x_1)^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgf(x_1 + x_2)\,,$$

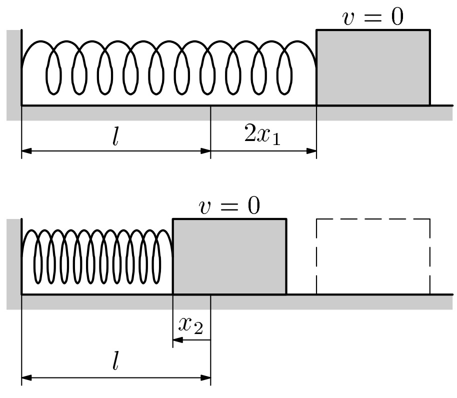
$$4k\frac{m^2g^2f_0^2}{k^2} = kx_2^2 + \frac{2m^2g^2ff_0}{k} + 2mgfx_2\,,$$

$$k^2x_2^2 + 2mgkfx_2 + 2m^2g^2f_0(f - 2f_0) = 0\,,$$

$$D = 4m^2g^2k^2f^2 - 8m^2g^2k^2f_0(f - 2f_0) = [2mgk(2f_0 - f)]^2\,,$$

$$x_2 = \frac{-2mgkf \pm 2mgk(2f_0 - f)}{2k^2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{2mg(f_0 - f)}{k}\,, \\ \dfrac{-2mgf_0}{k}\,. \end{array} \right.$$

Úloze vyhovuje kořen $x_2 = \dfrac{2mg(f_0 - f)}{k} = 1{,}6$ cm. Druhý kořen odpovídá počáteční poloze kvádru. Protože $2(f_0 - f) < f_0$, je $x_2 < x_1$ a kvádr po stlačení pružiny zůstane v klidu.



Obr. R2 **4 body**

c) Stav těsně po úderu, stav při maximálním roztažení pružiny a konečný stav soustavy jsou znázorněny na obr. R3. Podle zákona zachování energie je počáteční kinetická energie E_k kvádru rovna potenciální energii elastické E_3 pružiny při dosažení maximální deformace x_3 a práce W' spotřebované na dráze x_3 třecí silou. Pro celý děj pak platí, že počáteční kinetická energie kvádru je rovna práci $2W'$ spotřebované třecí silou při pohybu po dráze $2x_3$.

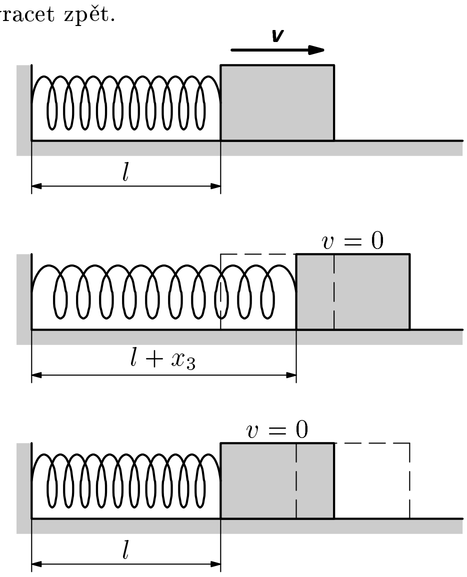
$$E_\mathrm{k} = E_3 + W' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_3^2 + mgfx_3\,,$$

$$E_\mathrm{k} = 2W' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = 2mgfx_3\,.$$

Řešením této soustavy dostaneme:

$$x_3 = \frac{2mgf}{k} = 3{,}9\ \mathrm{cm}\,, \qquad v = 2gf\sqrt{\frac{2m}{k}} = 0{,}88\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

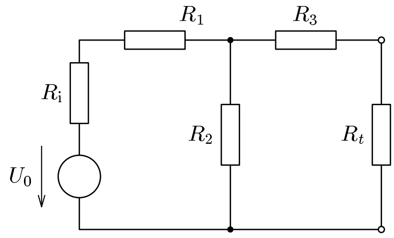
Protože $2f > f_0$, je také $x_3 > x_1$. Kvádr tedy po dosažení výchylky nezůstane v klidu a začne se vracet zpět.



Obr. R3

4 body

4. a) Obvod překreslíme dle obr. R4



Obr. R4

Dle Millmanovy poučky platí

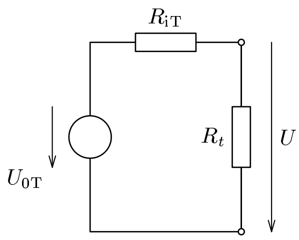
$$U_0 = \frac{U_1 R_{\mathrm{i}1} + U_2 R_{\mathrm{i}2}}{R_{\mathrm{i}1} + R_{\mathrm{i}2}},$$

$$R_\mathrm{i} = \frac{R_{\mathrm{i}1} \cdot R_{\mathrm{i}2}}{R_{\mathrm{i}1} + R_{\mathrm{i}2}}.$$

Pro dané hodnoty:
$U_0 = 11\ \mathrm{V}$, $R_\mathrm{i} = 0{,}50\ \Omega$.

1 bod

b) Schéma dále zjednodušíme užitím Théveninovy poučky (obr. R5):



Obr. R5

$$U_\mathrm{0T} = U_0 \frac{R_2}{R_\mathrm{i} + R_2 + R_1} = 8{,}8\ \mathrm{V},$$

$$R_\mathrm{iT} = R_3 + \frac{R_2(R_1 + R_\mathrm{i})}{R_2 + R_1 + R_\mathrm{i}} = 6{,}0\ \Omega.$$

Potom

$$I = \frac{U_\mathrm{0T}}{R_\mathrm{iT} + R_t} = 0{,}55\ \mathrm{A},$$

$$U = \frac{U_\mathrm{0T} R_t}{R_\mathrm{iT} + R_t} = 5{,}5\ \mathrm{V}.$$

3 body

c) $I = \dfrac{U_\mathrm{0T}}{R_\mathrm{iT} + R_t}$, za R_t dosadíme $R_t = R_0(1+\alpha t)$, kde R_0 je odpor teplotně závislého rezistoru při teplotě $t = 0\ ^\circ\mathrm{C}$. Potom

$$I = \frac{U_\mathrm{0T}}{R_\mathrm{iT} + R_0(1 + \alpha t)}\,. \tag{1}$$

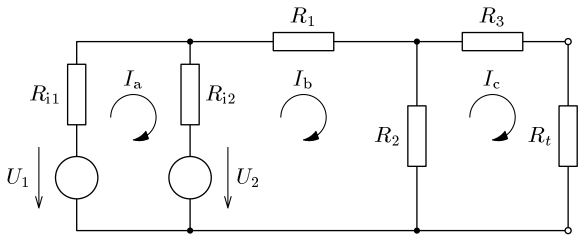
1 bod

d) Ze vztahu (1) vyjádříme t:

$$t = \frac{U_\mathrm{0T} - I' R_\mathrm{iT} - I' R_0}{I' R_0 \alpha} = 40\ ^\circ\mathrm{C}.$$

1 bod

e) Užitím metody smyčkových proudů (obr. R6):



Obr. R6

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{i}2}(I_{\mathrm{a}} - I_{\mathrm{b}}) + U_2 - U_1 + R_{\mathrm{i}1} I_{\mathrm{a}} &= 0 \\
R_1 I_{\mathrm{b}} + R_2(I_{\mathrm{b}} - I_{\mathrm{c}}) - U_2 + R_{\mathrm{i}2}(I_{\mathrm{b}} - I_{\mathrm{a}}) &= 0 \\
R_3 I_{\mathrm{c}} + R_t I_{\mathrm{c}} + R_2(I_{\mathrm{c}} - I_{\mathrm{b}}) &= 0
\end{aligned}
$$

Po dosazení konkrétních hodnot napětí a odporů dostaneme pro číselné hodnoty proudů soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
2I_{\mathrm{a}} - I_{\mathrm{b}} &= 2 \\
-I_{\mathrm{a}} + 13I_{\mathrm{b}} - 10I_{\mathrm{c}} &= 10 \\
-10I_{\mathrm{b}} + 24I_{\mathrm{c}} &= 0
\end{aligned}
$$

Řešením této soustavy dostaneme jeden z proudů $I_{\mathrm{c}} = 0{,}55$ A, což je také hledaný proud protékající rezistorem R_t.

4 body