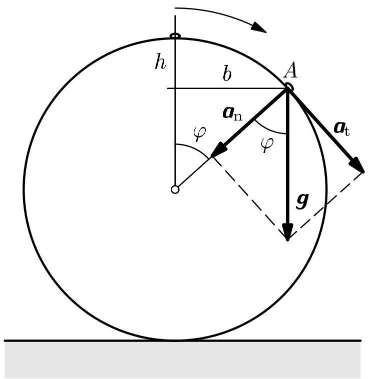
Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: I. Čáp (6), M. Jarešová (1), L' Konrád (2), P. Šedivý (3, 4, 5) a B. Vybíral (7). Konečná úprava P. Šedivý

1. a) Tělísko opustí kouli v místě, kde bude výslednice normálového a tečného zrychlení rovna $\boldsymbol{g}$.



Obr. R1

Dle obr. R1 platí $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R} = g\cos\varphi$, z čehož $\cos\varphi = \dfrac{v^2}{Rg}$. Ze zákona zachování mechanické energie určíme $v^2 = 2hg$. Po dosazení do vztahu pro $\cos\varphi$ dostaneme $\cos\varphi = \dfrac{2h}{R}$. Dále dle obr. R1 platí

$$\cos\varphi = \frac{R-h}{R}, \quad \frac{2h}{R} = \frac{R-h}{R},$$

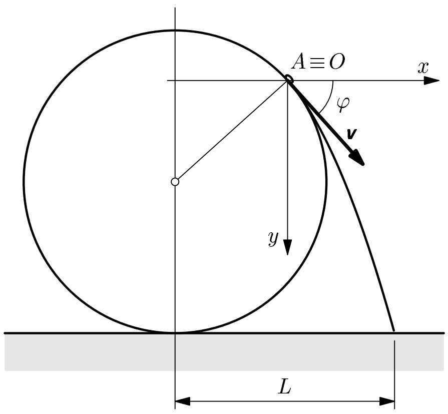
z čehož $h = \dfrac{R}{3}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$. Pro b potom platí

$$b = R\sin\varphi = R\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{5}}{3}R.$$

Tělísko opustí kouli ve vodorovné vzdálenosti $b = \dfrac{\sqrt{5}}{3}R = 0{,}75$ m v hloubce $h = \dfrac{R}{3} = 0{,}33$ m od místa, kde začal jeho pohyb.

3 body

b) Pohyb od bodu A pokračuje jako vrh šikmý dolů s počátečním úhlem φ (obr. R2).



Obr. R2

Bod A zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Pak bude platit

$$x = vt\cos\varphi,$$

$$y = vt\sin\varphi + \frac{1}{2}gt^2.$$

Po dosazení z úlohy a)

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}Rg}\cdot t, \qquad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}Rg}\cdot t + \frac{1}{2}gt^2. \qquad (2)$$

V bodě dopadu

$$\frac{5}{3}R = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}Rg}\cdot t + \frac{1}{2}gt^2. \tag{3}$$

Rovnici (3) upravíme na tvar

$$3gt^2 + 2\sqrt{\frac{10}{3}Rg}\cdot t - 10R = 0.$$

Dostaneme kvadratickou rovnici, vyhovuje pouze kladné řešení

$$t = \frac{1}{6}\left(\sqrt{\frac{400}{3}} - 2\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{10}-1\right)\sqrt{\frac{10R}{3g}}. \tag{4}$$

Vztah (4) dosadíme do (1). Po úpravě dostaneme $x = \frac{1}{27}(20\sqrt{2} - 4\sqrt{5})R$. Vodorovná vzdálenost místa dopadu tělíska od místa dotyku koule s vodorovnou rovinou pak bude

$$L = \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{1}{27}(20\sqrt{2} - 4\sqrt{5})R = \frac{5}{27}(4\sqrt{2} + \sqrt{5})R.$$

Pro dané hodnoty $L = 1{,}462$ m.

5 bodů

c) Rychlost dopadu je dána vztahem

$$v = \sqrt{v^2\cos^2\varphi + (v\sin\varphi + gt)^2}.$$

Po dosazení za t ze vztahu (4), $v = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$, $\cos\varphi = \frac{2}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$ a úpravě vzniklého vztahu dostaneme

$$v = 2\sqrt{Rg}.$$

Pro dané hodnoty $v = 6{,}26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Jiné řešení: je možno použít zákona zachování mechanické energie pro nejvyšší a nejnižší polohu tělíska. Dostaneme

$$v = \sqrt{2\cdot 2Rg} = 2\sqrt{Rg}$$

jako v předchozím postupu.

2 body

2. a) Při srážce koule se sloupkem je splněn zákon zachování momentu hybnosti vzhledem k ose O a zákon zachování mechanické energie (dokonale pružná srážka):

$$Mvx = J\omega_0\,, \qquad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2\,,$$

kde v je velikost rychlosti koule těsně před nárazem, ω_0 je úhlová rychlost otáčivého pohybu sloupku okolo osy O těsně po nárazu a J je moment setrvačnosti sloupku vzhledem k ose O. S použitím Steinerovy věty dostaneme

$$J = \frac{1}{3}m(a^2 + h^2)\,.$$

Z uvedených rovnic vyjádříme podmínku pro výšku nárazu

$$x = \sqrt{\frac{J}{M}} = \sqrt{\frac{m(a^2 + h^2)}{3M}}\,.$$

4 body

Musí ovšem platit $x \leq h$. Z toho plyne podmínka řešitelnosti úlohy a):

$$\frac{M}{m} \geq \frac{a^2 + h^2}{3h^2}\,.$$

1 bod

b) Ze zákona zachování mechanické energie určíme kinetickou energii koule těsně před nárazem $E_\mathrm{k} = Mgl(1 - \cos\alpha)$. Při otočení do labilní polohy získá sloupek potenciální energii

$$E_\mathrm{p} = mg\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{h}{2}\right) = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)\,.$$

Aby došlo k převrácení sloupku, musí platit $E_\mathrm{k} > E_\mathrm{p}$. Z toho

$$1 - \cos\alpha > \frac{m\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}{2Ml}\,, \qquad \cos\alpha < 1 - \frac{m\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}{2Ml}\,.$$

4 body

Musí ovšem platit $\alpha < 90^\circ$, tj. $\cos\alpha > 0$. Z toho plyne podmínka řešitelnosti úlohy b):

$$\frac{m\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}{2Ml} < 1 \quad \Rightarrow \quad l > \frac{m}{2M}\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)\,.$$

1 bod

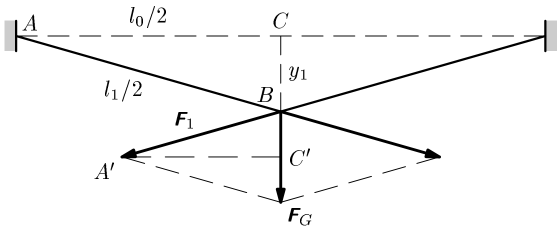
3. a) Z Hookova zákona a z Pythagorovy věty pro ΔABC (obr. R3) plyne

$$l_1 - l_0 = \frac{\sigma_1}{E} l_0 = 2\left(\sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + y_1^2} - \frac{l_0}{2}\right) = l_0\sqrt{1 + \left(\frac{2y_1}{l_0}\right)^2} - l_0 \approx$$

$$\approx l_0\left(1 + \frac{2y_1^2}{l_0^2} - 1\right) = \frac{2y_1^2}{l_0}.$$

Z toho

$$y_1 \approx l_0\sqrt{\frac{\sigma_1}{2E}} = 7{,}4\ \mathrm{cm}.$$



Obr. R3

Z podobnosti trojúhelníků ABC a $A'BC'$ dostaneme

$$\frac{F_G}{2F_1} = \frac{y_1}{\frac{l_1}{2}} \approx \frac{y_1}{\frac{l_0}{2}}, \qquad F_G = m_1 g \approx \frac{4F_1}{l_0} y_1 \approx \frac{4\sigma_1 S}{l_0} \cdot l_0\sqrt{\frac{\sigma_1}{2E}},$$

$$m_1 = \frac{S}{g}\sqrt{\frac{8\sigma_1^3}{E}} = 9{,}03\ \mathrm{kg}.$$

5 bodů

b) Obdobně jako v části a) dostaneme

$$F_G = mg \approx \frac{4F}{l_0} y \quad \text{pro každé} \quad 0 < y < y_1$$

a také

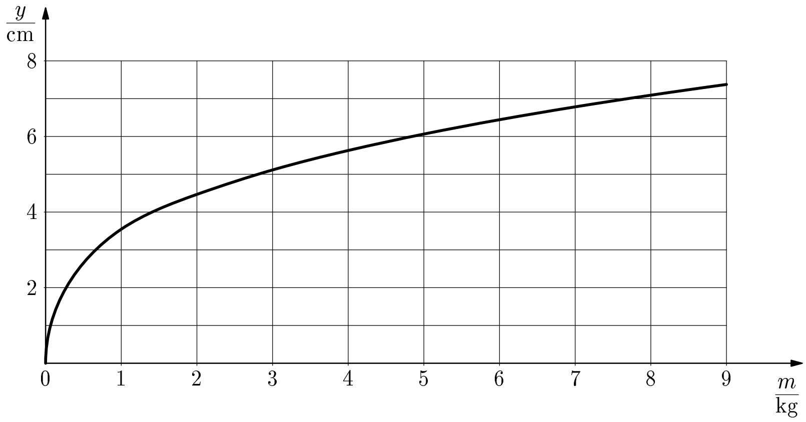
$$\frac{2y^2}{l_0} \approx \frac{Fl_0}{ES}, \quad \text{tj.} \quad F \approx \frac{2y^2 ES}{l_0^2}.$$

Proto

$$mg \approx \frac{4 \cdot 2y^2 ES}{l_0^3} y, \qquad y^3 \approx \frac{mgl_0^3}{8ES}, \qquad y \approx l_0\sqrt[3]{\frac{g}{8ES}} \cdot \sqrt[3]{m}.$$

Po dosazení číselných hodnot

$$\{y\} \approx 0{,}0355\sqrt[3]{\{m\}} \quad \text{(viz graf na obr. R4).}$$



Obr. R4

5 bodů

4. a) Vyjdeme ze vztahů

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_1}{k}, \quad T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 + m_2}{k}.$$

Odečtením a úpravou dostaneme

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_2}{k}, \quad k = \frac{4\pi^2 m_2}{T_2^2 - T_1^2} = 20{,}2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}.$$

Miska má hmotnost

$$m_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = \frac{m_2 T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = 1{,}15\ \mathrm{kg}.$$

4 body

b) Amplituda kmitů po uvolnění závaží je stejná jako změna rovnovážné polohy vyvolaná tíhou závaží:

$$y_m = \frac{m_2 g}{k} = \frac{g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{4\pi^2} = 0{,}49\ \mathrm{m}.$$

2 body

c) Na závaží působí během pohybu výslednice tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a reakce misky $\boldsymbol{R}$. Platí

$$\boldsymbol{F} = m_2 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R}.$$

Z toho určíme tíhu závaží

$$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_G - m_2 \boldsymbol{a}.$$

Její velikost je

$$G = m_2 g + m_2 a = m_2(g + a),$$

kde a je **souřadnice zrychlení**, která nabývá střídavě kladných a záporných hodnot. Protože pohyb začíná v horní krajní poloze, platí

$$a = -\omega^2 y = -\omega^2 y_m \cos \omega t,$$

$$G = m_2 g - m_2 \omega^2 y_m \cos \omega t = m_2 g \left(1 - \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2} \cos \frac{2\pi t}{T_2}\right).$$

Největší a nejmenší velikost tíhy jsou v poměru

$$\frac{G_{max}}{G_{min}} = \frac{1 + \dfrac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}}{1 - \dfrac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}} = \frac{2T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = 2{,}7.$$

4 body

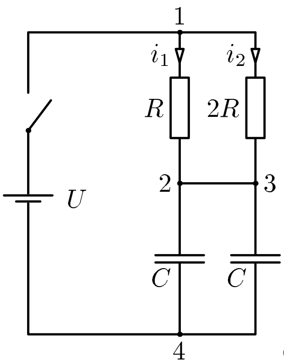
5. a) Kondenzátory se nabijí na napětí U nábojem $Q = CU$. Označme proudy ve větvích 1–2 a 1–3 podle obr. R5. Během nabíjení kondenzátorů je na obou rezistorech stejné napětí. Proto $i_1 = 2i_2$. Označme Q_1 náboj, který projde rezistorem o odporu R, a Q_2 náboj, který projde rezistorem o odporu $2R$ a Q_3 náboj, který prošel větví 2–3. Platí

$$Q_1 = 2Q_2\,, \qquad Q_1 + Q_2 = 2Q\,.$$

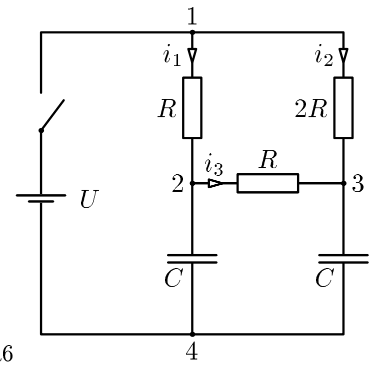
Řešením této soustavy rovnic je $\quad Q_1 = \frac{4}{3}Q\,, \qquad Q_2 = \frac{2}{3}Q\,.$

Do uzlu 2 tedy byl rezistorem o odporu R přiveden náboj $Q_1 = \frac{4}{3}Q$, ale kondenzátor přijal jen náboj Q. Rozdíl, tj. náboj $Q_3 = \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}UC$, přešel do uzlu 3.

3 body



Obr. R5



Obr. R6

b) V druhém případě označíme proudy procházející rezistory podle obr. R6. Součet napětí na rezistorech o odporu R je roven napětí na rezistoru o odporu $2R$. Z toho

$$Ri_1 + Ri_3 = 2Ri_2 \quad \Rightarrow \quad i_1 + i_3 = 2i_2 \quad \rightarrow \quad Q_1 + Q_3 = 2Q_2$$

Řešením soustavy rovnic

$$Q_1 + Q_3 = 2Q_2\,, \qquad Q_1 - Q_3 = Q = CU\,, \qquad Q_2 + Q_3 = Q = CU$$

dostaneme $Q_3 = \dfrac{Q}{4} = \dfrac{CU}{4}$.

4 body

c) Během nabíjení kondenzátorů vykoná zdroj v obou případech elektrickou práci $W_z = 2UQ = 2CU^2$, ale kondenzátory získají energii $2E_C = 2 \cdot \frac{1}{2}CU^2 = CU^2$. Rozdíl, tj. $Q_j = CU^2$, spotřebují rezistory jako Joulovo teplo.

3 body

7. a) Označíme-li m_{He} hmotnost helia v balónku a $m_{\mathrm{v}0}$ hmotnost vzduchu vytlačeného balónkem ve výšce $h = 0$, bude podle Archimedova zákona a podle druhého pohybového zákona platit

$$(m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{b}})\, a_0 = (m_{\mathrm{v}0} - m_{\mathrm{He}} - m_{\mathrm{b}})\, g \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = \frac{m_{\mathrm{v}0} - m_{\mathrm{He}} - m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{b}}} g\,.$$

Hmotnosti plynů určíme ze stavové rovnice:

$$m_{\mathrm{v}0} = \frac{p_{\mathrm{a}0} V_0 M_{\mathrm{m}}}{T_0 R} = 8{,}76 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\,,$$

$$m_{\mathrm{He}} = \frac{p_0 V_0 M'_{\mathrm{m}}}{T_0 R} = 1{,}23 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\,.$$

Pak $a_0 = \dfrac{8{,}76 - 1{,}23 - 2{,}5}{1{,}23 + 2{,}5} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 13{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2 body

b) Mezi objemem a přetlakem platí přímá úměrnost. Proto můžeme pro výšky $h = 0$ a h psát

$$V_0 = k(p_0 - p_{\mathrm{a}0})\,, \quad V = k(p - p_{\mathrm{a}}). \qquad \text{Z toho} \quad \frac{V}{V_0} = \frac{p - p_{\mathrm{a}}}{p_0 - p_{\mathrm{a}0}}\,.$$

Tlak p helia ve výšce h, kde balónek praskne, vyjádříme podle Boylova zákona a atmosférický tlak p_a v téže výšce podle barometrické rovnice:

$$p = p_0 \frac{V_0}{V}\,, \qquad p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{a}0} \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0} gh}\,.$$

Pak

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p_0 \dfrac{V_0}{V} - p_{\mathrm{a}0} \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0} gh}}{p_0 - p_{\mathrm{a}0}}\,, \qquad \frac{V}{V_0} = \alpha\,,$$

$$\alpha\,(p_0 - p_{\mathrm{a}0}) = \frac{p_0}{\alpha} - p_{\mathrm{a}0} \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0} gh}\,, \qquad \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0} gh} = \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\mathrm{a}0}}\,,$$

$$h = -\frac{RT_0}{M_{\mathrm{m}} g} \ln \left[\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\mathrm{a}0}}\right] = 10\,400\ \mathrm{m}\,.$$

5 bodů

c) Aby balónek vůbec vystoupil do výšky h určené v části b), musí podle Archimedova zákona pro hmotnost m_{v} vzduchu vytlačeného balónkem v této výšce platit $m_{\mathrm{v}} \geq m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{b}}$.

$$m_{\mathrm{v}} = \frac{p_{\mathrm{a}} V M_{\mathrm{m}}}{T_0 R} = \frac{p_{\mathrm{a}0} \alpha V_0 M_{\mathrm{m}}}{T_0 R} \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0} gh} = \frac{p_{\mathrm{a}0} \alpha V_0 M_{\mathrm{m}}}{T_0 R} \left[\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\mathrm{a}0}}\right]\,.$$

V našem případě $m_{\mathrm{v}} = 7{,}68\ \mathrm{g} > 3{,}73\ \mathrm{g} = m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{b}}\,.$

Aby vyšlo $h > 0$, musí pro argument přirozeného logaritmu platit

$$0 < \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\mathrm{a}0}} < 1\,.$$

V našem případě $\alpha - \left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right) \dfrac{p_0}{p_{\mathrm{a}0}} = 0{,}2922$. Podmínka je tedy splněna.

3 body