Řešení úloh 1. kola 48. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 4, 6, 7), M. Jarešová (3) a KVANT (2)

1. Nejprve určíme síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ napínající vlákno před přestřižením pravého vlákna. Počátek O vztažné soustavy zvolíme na levém konci tyče (obr. R1). Z momentové věty vzhledem k bodu O plyne

$$F_2 \cdot 3l = mg \cdot l + 2mg \cdot 2l \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{5}{3}mg\,, \quad F_1 = 3mg - F_2 = \frac{4}{3}mg\,.$$

2 body

Po přestřižení pravého vlákna bude na soustavu působit jen síla $\boldsymbol{F}$ levého vlákna a tíhové síly $\boldsymbol{F}_{G1}$ a $\boldsymbol{F}_{G2}$. Soustava se začne otáčet okolo bodu O (obr. R2). Vzhledem k malým poloměrům koulí se na ně budeme dívat jako na hmotné body. Moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu O je

$$J = ml^2 + 2m \cdot (2l)^2 = 9ml^2$$ **1 bod**

a její těžiště T má souřadnici

$$x_T = \frac{ml + 2m \cdot 2l}{3m} = \frac{5}{3}l\,.$$ **1 bod**

Z první impulzové věty, druhé impulzové věty a vazební podmínky

$$\boldsymbol{a}_T \sum m = \sum \boldsymbol{F}\,, \qquad J\boldsymbol{\varepsilon} = \sum \boldsymbol{M}\,, \qquad a_T = \varepsilon \cdot x_T$$

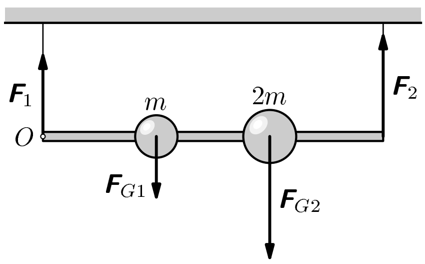
3 body

postupně dostaneme:

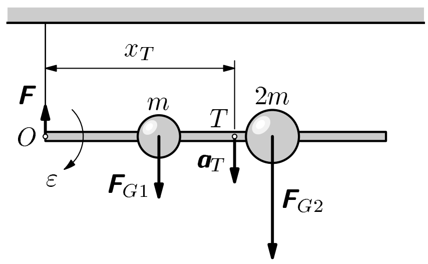
$$\varepsilon = \frac{mgl + 2mg \cdot 2l}{9ml^2} = \frac{5g}{9l}\,, \qquad a_T = \frac{5g}{9l} \cdot \frac{5l}{3} = \frac{25g}{27} = \frac{mg + 2mg - F}{3m}\,,$$

$$F = 3mg\left(1 - \frac{25}{27}\right) = \frac{2}{9}mg = \frac{F_1}{6}\,.$$

Síla napínající levé vlákno se v okamžiku přestřižení pravého vlákna šestkrát zmenší. **3 body**



Obr. R1



Obr. R2

2. Výkon motoru je roven kinetické energii vzduchu, který je za jednu sekundu uveden rotorem vrtulníku do pohybu:

$$P = \frac{1}{2} Q_m v^2 = \frac{1}{2} \varrho S v \cdot v^2 = \frac{1}{2} \varrho S v^3 \,, \tag{1}$$

kde Q_m je hmotnostní tok vzduchu, ϱ jeho hustota, v jeho rychlost a S obsah kruhu, ve kterém se rotor pohybuje. **3 body**

Síla, kterou rotor působí na vzduch, je podle druhého pohybového zákona rovna časové změně jeho hybnosti. Je tedy rovna hybnosti vzduchu, který rotor uvede za jednu sekundu z klidu do pohybu. Podle principu akce a reakce je stejně velká jako síla, kterou urychlovaný vzduch působí na vrtulník. Je rovna tíze vrtulníku:

$$mg = Q_m v = \varrho S v^2 \,, \quad \text{z toho} \quad v = \sqrt{\frac{mg}{\varrho S}} \,. \tag{2}$$

3 body

Dosazením do (1) dostaneme

$$P = \frac{1}{2} S \varrho \left(\frac{mg}{\varrho S} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^3 g^3}{\varrho S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^3 g^3}{\varrho \pi r^2}} \,, \tag{3}$$

kde r je poloměr rotoru. **2 body**

Zbývá ještě odhadnout hustotu vzduchu za obvyklých podmínek. Jeho molární hmotnost je $M_\mathrm{m} = 28{,}96 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. Předpokládáme-li atmosférický tlak $p \approx 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa a absolutní teplotu $T \approx 300$ K, je podle stavové rovnice

$$\varrho = \frac{p M_\mathrm{m}}{RT} \approx 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} \,.$$

Po dosazení do (3) dostáváme $P \approx 30\ \mathrm{kW}$. **2 body**

3. a) Vyjdeme z obr. R3. Platí:

$$\gamma = \varepsilon \,, \tag{1}$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \omega} = n_\text{ž} \quad \Rightarrow \quad \sin \omega = \frac{\sin \varepsilon}{n_\text{ž}} \,, \tag{2}$$

$$\gamma + (90^\circ - \omega) + 2\varphi + 90^\circ = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \gamma + 2\varphi - \omega = 180^\circ \,, \tag{3}$$

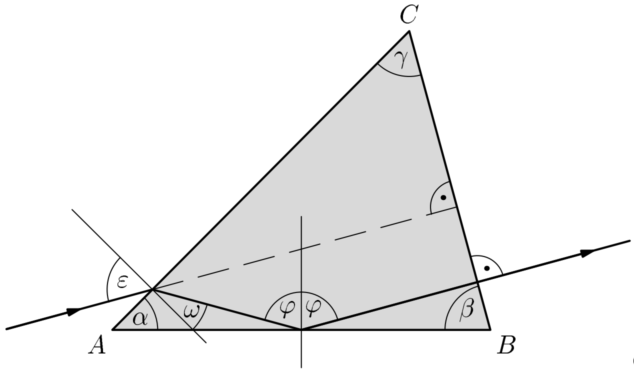
$$\alpha + (90^\circ + \omega) + (90^\circ - \varphi) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha + \omega \,. \tag{4}$$

Dosazením z (4) do (3) dostaneme

$$\gamma + 2(\alpha + \omega) - \omega = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - \frac{1}{2}(\omega + \gamma)\,. \tag{5}$$

Číselně vychází $\gamma = 60°$, $\omega = 29°37'$, $\alpha = 45°11'$, $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 74°49'$.

5 bodů



Obr. R3

b) Paprsek žlutého světla prochází dvojhranolem symetricky (obr. R4). Pro paprsek jiné vlnové délky platí obecně vztahy (1) až (5). Z obr. R5 dále odvodíme:

$$(90° - \varphi) + (90° - \varphi') + 2\beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 2\beta - \varphi\,, \tag{6}$$

$$\omega' = \varphi' - \alpha\,, \tag{7}$$

$$\frac{\sin\varepsilon'}{\sin\omega'} = n \quad \Rightarrow \quad \sin\varepsilon' = n \sin\omega'\,. \tag{8}$$

Postupným numerickým výpočtem dostaneme:
Červený konec spektra: $n_{\check{c}} = 1{,}735$,

$\omega_{\check{c}} = 29°57'$, $\varphi_{\check{c}} = 75°8'$, $\varphi'_{\check{c}} = 74°30'$, $\omega'_{\check{c}} = 29°18'$, $\varepsilon'_{\check{c}} = 58°7'$.

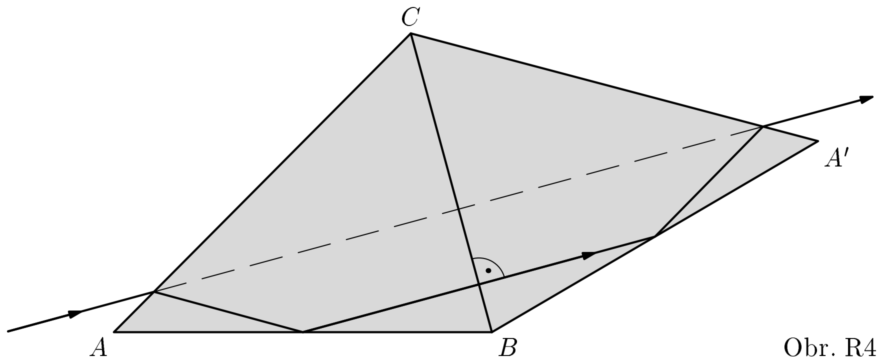
Fialový konec spektra: $n_{\mathrm{f}} = 1{,}811$,

$\omega_{\mathrm{f}} = 28°34'$, $\varphi_{\mathrm{f}} = 73°45'$, $\varphi'_{\mathrm{f}} = 75°52'$, $\omega'_{\mathrm{f}} = 30°42'$, $\varepsilon'_{\mathrm{f}} = 67°32'$.

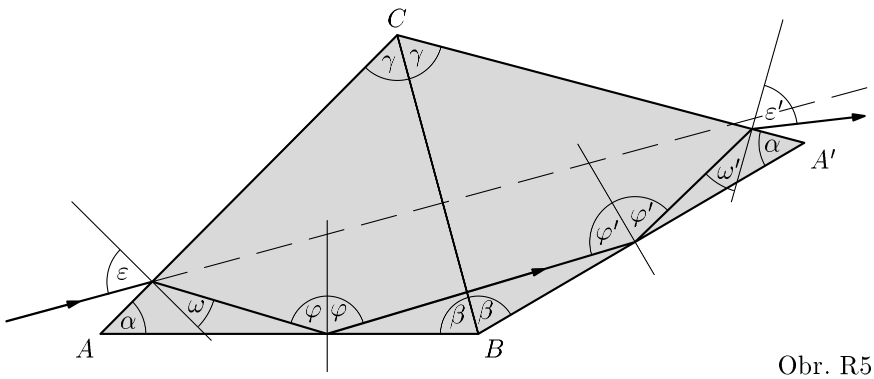
Úhlová šířka spektra na výstupu z dvojhranolu je

$$\delta = \varepsilon'_{\mathrm{f}} - \varepsilon'_{\check{c}} = 9°24'.$$

5 bodů



Obr. R4

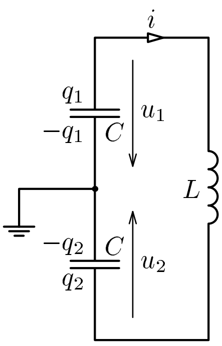


Obr. R5

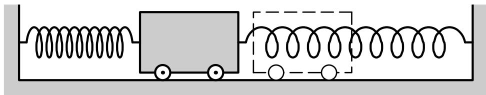
4. a) Výsledná kapacita dvou sériově spojených kondenzátorů o kapacitě C je $C/2$. Periodu kmitů obvodu na obr. R6 určíme pomocí Thomsonova vztahu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}} = 4{,}44\ \mathrm{ms}\,.$$

Děje v obvodu se řídí obdobnými zákony jako kmity vozíku mezi dvěma pružinami, z nichž jedna je napnuta a druhá má klidovou délku (obr. R7). Náboj bude přecházet z jednoho kondenzátoru na druhý a zpět. Proud cívkou dosáhne maxima vždy v okamžiku, kdy napětí na obou kondenzátorech bude stejné a bude mít hodnotu $U/2$.



Obr. R6



Obr. R7

Časový průběh obou napětí na kondenzátorech a proudu v obvodu popisují vztahy

$$u_1 = \frac{U}{2}(1 + \cos \omega t)\,, \qquad u_2 = \frac{U}{2}(1 - \cos \omega t)\,, \qquad i = I_\mathrm{m} \sin \omega t\,.$$

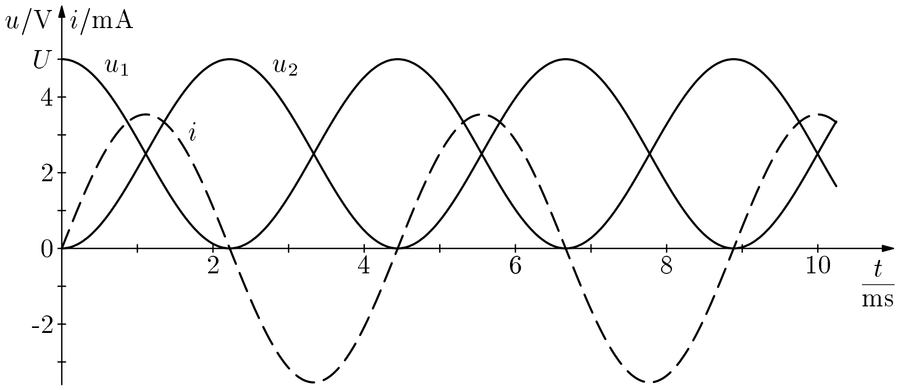
3 body

Amplitudu proudu určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}CU^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}C\left(\frac{U}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}LI_\mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{m} = U\sqrt{\frac{C}{2L}} = 3{,}54\ \mathrm{mA}\,.$$

2 body

b) Provedení grafů **2 body**



Obr. R8

c) Na počátku je na jednom kondenzátoru náboj $q_0 = UC$, druhý kondenzátor je bez náboje a proud je nulový. Soustava má energii

$$E_0 = \frac{1}{2}CU^2\,.$$

Po proběhnutí tlumených kmitů je náboj q_0 rozdělen souměrně na oba kondenzátory. Pak platí $u_1 = u_2 = U/2$ a energie soustavy se tedy během kmitů zmenší na

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2}C\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}CU^2 = \frac{E_0}{2}\,.$$

Úbytek elektrické energie soustavy je roven Joulovu teplu, které vznikne na ohmických odporech obvodu:

$$Q_\mathrm{j} = \frac{E_0}{2} = \frac{1}{4}CU^2 = 6{,}25 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}\,.$$

3 body

5. a) Během jedné periody $T = 0{,}50$ s pohybu po Lissajousově křivce se vykoná jeden kmit ve směru osy x a dva kmity ve směru osy y. Vzhledem k počátečním podmínkám platí

$$x = x_\mathrm{m} \cos \omega_1 t\,, \qquad y = y_\mathrm{m} \sin \omega_2 t\,, \tag{1}$$

kde $x_\mathrm{m} = 25 \cdot 10^{-3}$ m, $y_\mathrm{m} = 20 \cdot 10^{-3}$ m

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 12{,}6\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}\,, \quad \omega_2 = \frac{4\pi}{T} = 25{,}1\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Derivováním vztahů (1) dostaneme

$$v_x = -\omega_1 x_\mathrm{m} \sin \omega_1 t\,, \qquad v_y = \omega_2 y_\mathrm{m} \cos \omega_2 t\,, \tag{2}$$

$$a_x = -\omega_1^2 x_\mathrm{m} \cos \omega_1 t\,, \qquad a_y = -\omega_2^2 y_\mathrm{m} \sin \omega_2 t\,. \tag{3}$$

V bodě A platí $t = 0$. Po dosazení do (2) a (3) dostaneme

$$v_{x0} = 0\,, \qquad v_{y0} = v_0 = \omega_2 y_\mathrm{m} = \frac{4\pi y_\mathrm{m}}{T} = 0{,}503\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,, \tag{4}$$

$$a_{x0} = -a_0 = -\omega_1^2 x_\mathrm{m} = \frac{4\pi^2 x_\mathrm{m}}{T^2} = 3{,}95\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,, \qquad a_{y0} = 0\,. \tag{5}$$

V bodě B platí $t = T/8$. Po dosazení do (2) a (3) dostaneme

$$v_{x1} = -v_1 = -\omega_1 x_\mathrm{m} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi x_\mathrm{m} \sqrt{2}}{T} = -0{,}222\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,, \qquad v_{y1} = 0\,, \tag{6}$$

$$a_{x1} = -\omega_1^2 x_\mathrm{m} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi^2 x_\mathrm{m} \sqrt{2}}{T^2} = -2{,}79\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,, \tag{7}$$

$$a_{y1} = -\omega_2^2 y_\mathrm{m} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{16\pi^2 y_\mathrm{m}}{T^2} = -12{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,. \tag{8}$$

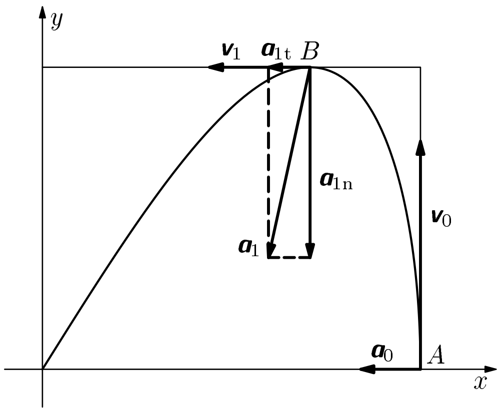
Zrychlení $\boldsymbol{a}_1$ v bodě B má velikost

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = 12{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

a je odchýleno od normály o úhel

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_{x1}}{a_{y1}} = 12{,}5^\circ\,.$$

5 bodů



Obr. R9

c) Poloměr oskulační kružnice v daném bodě trajektorie určíme ze vztahu

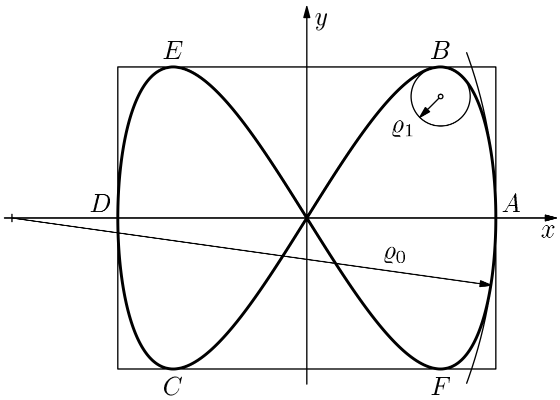
$$\varrho = \frac{v^2}{a_\mathrm{n}}\,. \tag{9}$$

V bodech A, B dostaneme (obr. R10):

$$\varrho_0 = \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{\omega_2^2 y_\mathrm{m}^2}{\omega_1^2 x_\mathrm{m}} = \frac{4y_\mathrm{m}^2}{x_\mathrm{m}} = 0{,}064\ \mathrm{m} = 64\ \mathrm{mm}\,,$$

$$\varrho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1\mathrm{n}}} = \frac{\omega_1^2 x_\mathrm{m}^2 \sin^2\dfrac{\pi}{4}}{\omega_2^2 y_\mathrm{m}} = \frac{x_\mathrm{m}^2}{8y_\mathrm{m}} = 3{,}9\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 3{,}91\ \mathrm{mm}\,.$$

3 body



Obr. R10

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2}CU_2^2 \approx \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}LI^2\,, \qquad L = \frac{C\left(U_2^2 - U_1^2\right)}{I^2}\,.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

7. a) Označme m hmotnost sondy a M hmotnost planety. Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$G\frac{Mm}{R_1^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R_1$$

odvodíme

$$M = \frac{4\pi^2 R_1^3}{GT^2} = 3{,}3 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}\,,$$

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{4\pi^2 R_1^3}{GT^2} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{3\pi R_1^3}{GT^2R^3} = 5\,470\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}\,.$$

2 body

b) Intenzitu gravitačního pole na povrchu planety určíme jako podíl gravitační síly, která zde působí na předmět umístěný na povrchu planety, a jeho hmotnosti. Označíme-li m_0 hmotnost takového předmětu, je velikost intenzity gravitačního pole

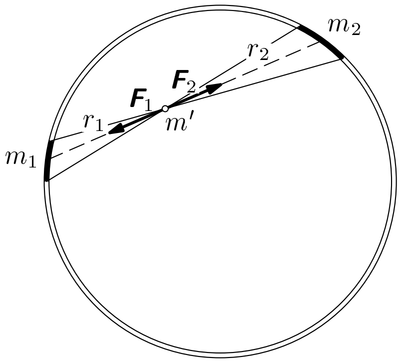
$$K_0 = \frac{\dfrac{GMm_0}{R^2}}{m_0} = \frac{GM}{R^2} = \frac{4G\pi^2R_1^3}{GT^2R^2} = \frac{4\pi^2R_1^3}{T^2R^2} = 3{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

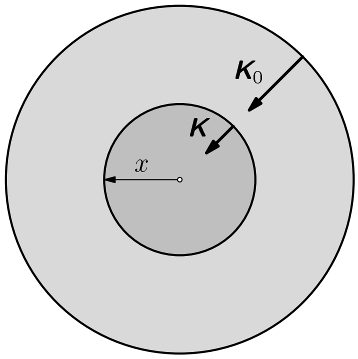
c) Rozložme planetu na soustředné kulové slupky o tloušťce $\Delta r \ll R$. Gravitační působení takovéto vrstvy o poloměru $r < R$ na částici o hmotnosti m' umístěnou uvnitř je nulové, jak plyne z obr. R11. Kuželová plocha s vrcholem v místě částice a malým vrcholovým úhlem vytne na kulové slupce dvě malé části o hmotnostech m_1 a m_2, které působí na částici gravitačními silami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ opačného směru. Vzhledem k podobnosti kuželů, které kuželová plocha vymezila, platí

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = G\frac{m_1m'}{r_1^2} = G\frac{m_2m'}{r_2^2} = F_2\,.$$

Účinek obou sil na částici se ruší. Stejně se ruší i působení gravitačních sil od zbývajících částí kulové slupky.



Obr. R11



Obr. R12

Výsledné gravitační působení na částici umístěnou ve vzdálenosti $x < R$ od středu planety je dáno gravitačním působením hmoty obsažené v kouli o poloměru x (Obr. R12) a intenzita gravitačního pole v tomto místě má velikost

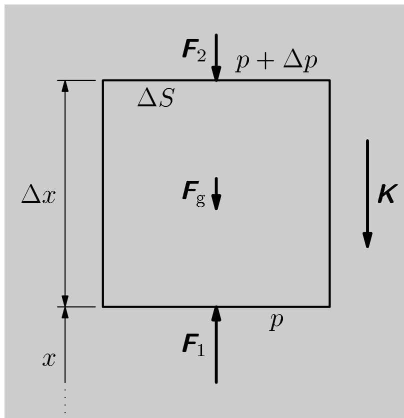
$$K = \frac{G\frac{4}{3}\pi\varrho x^3}{x^2} = G\frac{4}{3}\pi\varrho x = \frac{4\pi^2 R_1^3}{T^2 R^3}x = K_0\frac{x}{R}\,.$$

Závislost intenzity gravitačního pole na vzdálenosti od středu planety je lineární (obr. R14). **3 body**

d) Mějme válcový objemový element kapaliny o výšce Δx a obsahu podstavy ΔS, který se nachází ve vzdálenosti x od středu planety (obr. R13). Na něj působí gravitační síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$, která je v rovnováze s tlakovými silami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ působícími z okolní kapaliny na podstavy válce. Platí

$$F_\mathrm{g} = K\varrho\Delta S\Delta x = F_1 - F_2 = p\Delta S - (p+\Delta p)\Delta S\,,$$

$$\Delta p = -K\varrho\Delta x = -\frac{K_0\varrho}{R}x\Delta x\,.$$



Obr. R13

Tlak p_0 na povrchu planety je nulový. Tlak p ve vzdálenosti x od středu planety určíme integrací:

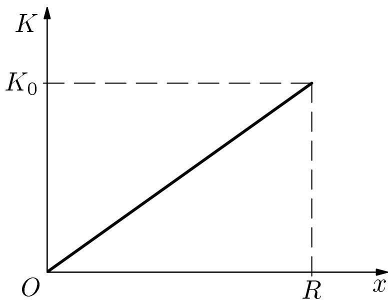
$$p_0 - p = -p = \int_x^R -\frac{K_0\varrho}{R}x\,\mathrm{d}x = -\frac{K_0\varrho}{2R}(R^2 - x^2)\,,$$

$$p = \frac{K_0 \varrho}{2R}(R^2 - x^2) = \frac{6\pi^3 R_1^6}{GT^4 R^6}(R^2 - x^2)\,.$$

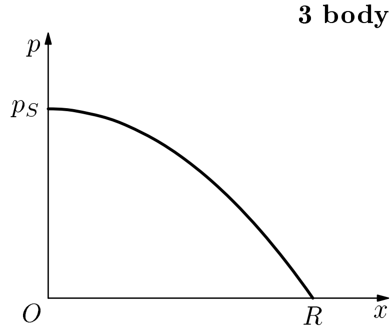
Závislost tlaku na vzdálenosti od středu planety je kvadratická (obr. R15). Uprostřed planety ($x = 0$) je tlak

$$p_S = \frac{6\pi^3 R_1^6}{GT^4 R^4} = 2{,}5 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Pa}\,.$$

3 body



Obr. R14



Obr. R15