Řešení úloh regionálního kola 48. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 3), P. Šedivý (4)

1. a) Na zrníčko písku, které leží na membráně kmitající s okamžitou výchylkou
$$y = A \sin \omega t \,,$$
působí výsledná síla o svislé souřadnici
$$F = ma = -m\omega^2 A \sin \omega t \,,$$
která je výslednicí tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ působící svisle dolů a reakční tlakové síly membrány $\boldsymbol{F}_\mathrm{r}$ působící svisle vzhůru. Platí
$$F = F_\mathrm{r} - mg \,, \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{r} = mg + F = mg - m\omega^2 A \sin \omega t \geq 0 \,.$$

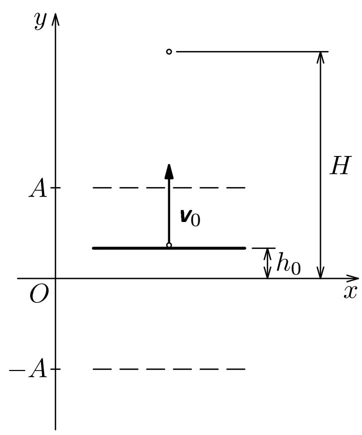
2 body

b) Aby zrníčko leželo trvale na membráně, musí po celou dobu kmitu platit
$$mg \geq m\omega^2 A \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{g}{\omega^2} \,.$$
Při větší amplitudě setrvá zrníčko na membráně do okamžiku, kdy velikost reakční síly membrány klesne na nulu. Zrníčko se pak pohybuje volně v tíhovém poli – koná svislý vrh vzhůru, dokud nedopadne zpět na membránu.

2 body

c) V čase t_0, kdy na zrníčko přestane působit tlaková síla membrány, je zrychlení zrníčka $a = -g$. Následuje svislý vrh vzhůru s počáteční výškou h_0 a počáteční rychlostí v_0, kterým zrníčko vystoupí do výšky H (obr. R1). V čase t_0 platí

$$
\begin{aligned}
y &= h_0 = A \sin \omega t_0, && (1)\\
v &= v_0 = \omega A \cos \omega t_0, && (2)\\
a &= -g = -\omega^2 A \sin \omega t_0. && (3)
\end{aligned}
$$



Obr. R1

Podle zákona zachování mechanické energie platí

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgH. \qquad (4)$$

3 body

Z rovnice (3) můžeme psát $\sin \omega t_0 = \dfrac{g}{\omega^2 A}$.

Po dosazení do rovnice (1) dostaneme

$$h_0 = A\frac{g}{\omega^2 A} = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = 9{,}9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \doteq 0{,}099\ \mathrm{mm}.$$

Dále užitím vztahu $\cos \omega t_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_0}$ dostaneme po dosazení do rovnice (2)

$$v_0 = \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 A}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 A^2 - \frac{g^2}{\omega^2}}.$$

Po dosazení za v_0, h_0 do rovnice (4) dostaneme

$$g\frac{g}{\omega^2} + \frac{1}{2}\left(\omega^2 A^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\right) = gH,$$

z čehož

$$A = \sqrt{\frac{2gH - \frac{g^2}{\omega^2}}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega}\sqrt{2gH - \left(\frac{g}{\omega}\right)^2}.$$

Po dosazení za $\omega = 2\pi f$ je nakonec

$$A = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{2gH - \left(\frac{g}{2\pi f}\right)^2}. \qquad (5)$$

Pro dané hodnoty: $A \doteq 0{,}99$ mm.

3 body

2. a) Pro složky počáteční rychlosti pohybu platí $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$. Doba výstupu je dána vztahem $t_\mathrm{v} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Pro složky trajektorie pohybu platí

$$x = v_0 \cos\alpha t, \qquad y = h + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Na zeď dorazí míč za dobu $t_\mathrm{z} = d/(v_0 \cos\alpha) = 0{,}87$ s. Výška, ve které míč narazí do zdi, je dána vztahem

$$H_\mathrm{z} = h + v_0 \sin\alpha \frac{d}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2\alpha},$$

po úpravě je

$$H_\mathrm{z} = h + d \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Pro dané hodnoty je $H_\mathrm{z} = 6{,}48$ m.

3 body

b) Svislá složka rychlosti míče se při odrazu od zdi nezmění. Míč bude stoupat po dobu $t_\mathrm{v} = (v_0 \sin\alpha)/g = 1{,}0$ s. Maximální výška výstupu je dána vztahem

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 6{,}60 \text{ m}.$$

Protože $t_\mathrm{v} > t_\mathrm{z}$, dosáhne míč nejvyššího bodu až po odrazu od zdi.

2 body

Doba pádu je pak dána vztahem

$$t_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}.$$

Pokud by tam nebyla zeď, doletěl by míč do vzdálenosti

$$L = v_0 \cos\alpha (t_\mathrm{v} + t_\mathrm{p}),$$

po dosazení je

$$L = v_0 \cos\alpha \left[\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}\right].$$

Vzdálenost d_0 míče odraženého od zdi (obr. R2) je dána vztahem

$$L = d + d_0 \quad \Rightarrow \quad d_0 = L - d.$$

Potom

$$d_0 = v_0 \cos\alpha \left[\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)} \right] - d.$$

Pro dané hodnoty je $d_0 = 22{,}7$ m.

3 body

c) Užitím zákona zachování mechanické energie dostaneme

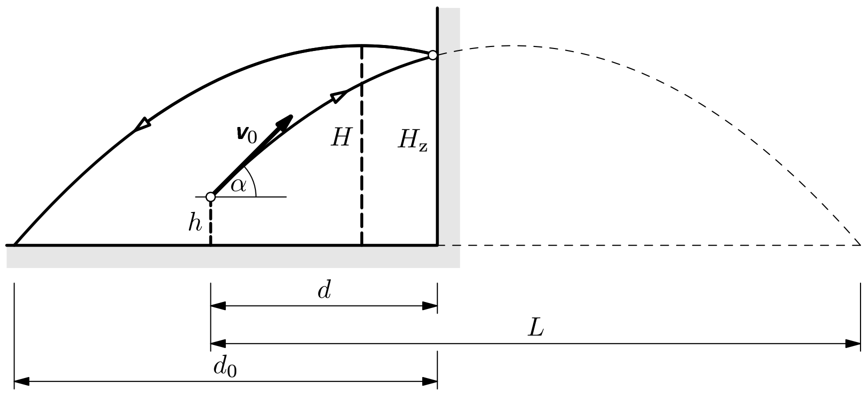
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2,$$

z čehož

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2hg}.$$

Pro dané hodnoty je $v_\mathrm{d} = 20{,}72\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2 body



Obr. R2

3. Při řešení označíme počáteční stav jako stav 1, stav po úniku plynu jako stav 2 a stav na konci děje jako stav 3. Pak označíme p_1 původní tlak, $p_2 = \frac{3}{4}p_1$ tlak po úniku plynu, p_3 tlak na konci děje a obdobně také příslušné objemy a teploty.

a) K řešení použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \quad \text{z čehož} \quad V_2 = \frac{p_1V_1}{T_1}\frac{T_2}{p_2}.$$

Dále použijeme rovnici pro adiabatický děj ve tvaru

$$p_1V_1^{\varkappa} = p_2V_2^{\varkappa},$$

kam dosadíme za V_2. Po úpravě dostaneme

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{T_1}{T_2}, \qquad T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 0{,}92T_1\,.$$

Absolutní teplota klesne bezprostředně po opětovném uzavření nádoby o 8 %.

4 body

b) Po uzavření nádoby proběhne izochorický děj. Platí $\frac{p_3}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, z čehož

$$p_3 = p_2\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{4}p_1\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{3}{4}p_1\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = p_1\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{-1}{\varkappa}} = 0{,}81p_1.$$

Tlak na konci děje je o 19 % menší než na začátku.

3 body

c) Ze stavové rovnice $\frac{pV}{T} = nR = \frac{m}{M_\mathrm{m}}R$, kde M_m je molární hmotnost plynu, dostaneme pro hmotnost plynu v nádobě

$$m = \frac{pVM_\mathrm{m}}{RT}\,.$$

Označme m_1 počáteční hmotnost a m_3 konečnou hmotnost plynu v nádobě. Pak

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{\frac{p_3VM_\mathrm{m}}{RT_1}}{\frac{p_1VM_\mathrm{m}}{RT_1}} = \frac{p_3}{p_1} = 0{,}81\,.$$

V nádobě zůstalo 81 % původní hmotnosti plynu.

3 body

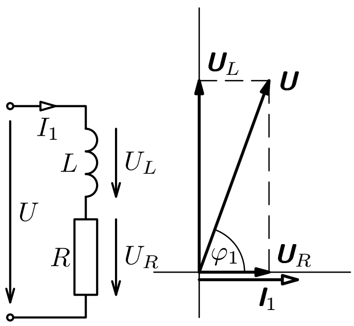
4. a) Vyjdeme z náhradních schémat a fázorových diagramů na obr. R3 a R4. V prvním obvodu platí

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (RI_1)^2 + (\omega L I_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 = R^2 + \omega^2 L^2 \,,$$

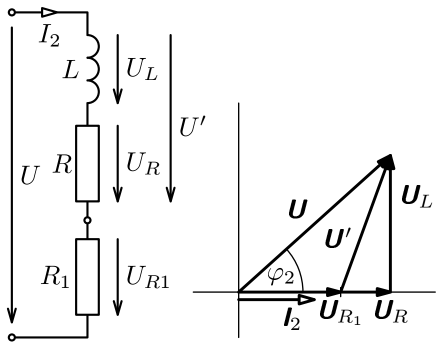
ve druhém

$$U^2 = (U_R + U_{R_1})^2 + U_L^2 = (R + R_1)^2 I_2^2 + (\omega L I_2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{U}{I_2}\right)^2 = (R + R_1)^2 + \omega^2 L^2 \,.$$



Obr. R3



Obr. R4

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$\left(\frac{U}{I_2}\right)^2 - \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 = 2RR_1 + R_1^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\left(\frac{U}{I_2}\right)^2 - \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - R_1^2}{2R_1} \,.$$

Z první rovnice vyjádříme

$$\omega L = \sqrt{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - R^2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\sqrt{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - R^2}}{2\pi f} \,.$$

Pro dané hodnoty $R = 42{,}5\ \Omega$, $L = 0{,}40$ H. **5 bodů**

b) Z fázorových diagramů plyne $\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\omega L}{R} \,, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{\omega L}{R + R_1} \,.$

Pro dané hodnoty $\varphi_1 = 71{,}4°$, $\varphi_2 = 41{,}6°$. **2 body**

c) Cívka je lineární jednobran, napětí na ní je přímo úměrné procházejícímu proudu. Platí tedy $U = ZI_1$, $U' = ZI_2$, kde $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ je impedance cívky. Z toho

$$\frac{U'}{U} = \frac{I_2}{I_1} \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{UI_2}{I_1} \,.$$

Pro dané hodnoty $U' = 14$ V. **3 body**