

Řešení úloh 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3, 4, 5, 7), B. Vybíral (6)

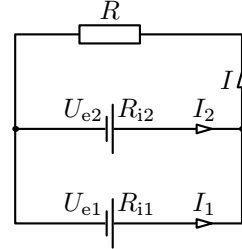
- 1.a) Při volbě směrů proudů podle obrázku sestavíme podle Kirchhoffových zákonů rovnice:

$$U_{e1} = R_{i1}I_1 + RI, \quad (1)$$

$$U_{e2} = R_{i2}I_2 + RI, \quad (2)$$

$$I_1 + I_2 = I, \quad (3)$$

Z rovnic plyne
$$I = \frac{U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1}}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}. \quad (4)$$



Obr. R1

Napětí na rezistoru je

$$U = RI = \frac{R(U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}.$$

Číselně pro $R = R_0$ vychází $U = 1,29$ V.

3 body

- b) Předpokládejme, že platí $U_{e1} < U_{e2}$. Pak proud může téci v opačném směru vzhledem k polaritě zdroje pouze zdrojem o elektromotorickém napětí U_{e1} . Proud tekoucí tímto zdrojem tak splňuje podmínku $I_1 < 0$. Z rovnice (1) vyjádříme proud I_1 a do získaného vztahu dosadíme z rovnice (4) proud I . Po úpravě dostaneme

$$I_1 = \frac{U_{e1}}{R_{i1}} - \frac{R}{R_{i1}} \cdot \frac{U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1}}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}.$$

Z podmínky $I_1 < 0$ v této rovnici plyne $R > \frac{U_{e1}}{U_{e2} - U_{e1}}R_{i2}$.

Číselně vychází $R > \frac{8}{3}\Omega$.

3 body

- c) Příkon rezistoru je

$$P = RI^2 = \frac{R(U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^2}. \quad (5)$$

Provedeme derivaci příkonu P podle odporu R :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= \frac{(U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2 \cdot (R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^2 - R \cdot 2(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)(R_{i1} + R_{i2})}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^4} = \\ &= (U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2 \frac{(R_{i1}R_{i2})^2 - R^2(R_{i1} + R_{i2})^2}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^4} = \\ &= (U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2 \frac{R_{i1}R_{i2} - R(R_{i1} + R_{i2})}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^3}. \end{aligned}$$

Z podmínky $\frac{dP}{dR} = 0$ plyne, že hledaný odpor je

$$R' = \frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}. \quad (6)$$

Pro $R < R'$ je $\frac{dP}{dR} > 0$, pro $R > R'$ je $\frac{dP}{dR} < 0$. Pro $R = R'$ dosahuje tedy funkce (5) maxima. Maximální příkon dostaneme dosazením odporu z rovnice (6) do rovnice (5):

$$P_{\max} = \frac{(U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2}{4R_{i1}R_{i2}(R_{i1} + R_{i2})}.$$

Číselně je $R' = 0,40 \Omega$, $P_{\max} = 1,19 \text{ W}$.

4 body

2. Během nabíjení kondenzátoru projde obvodem náboj $Q = CU_e$ a celková práce vykonaná zdrojem je $W_z = U_e Q = CU_e^2$, zatímco kondenzátor získá energii $E = \frac{1}{2}CU_e^2$, což je jedna polovina. Druhá polovina energie se spotřebuje ve vnitřním odporu zdroje a ve spotřebiči. Rozdělí se v poměru jejich odporů. Spotřebič během nabíjení kondenzátoru přijme energii

$$E_1 = \frac{1}{2}CU_e^2 \frac{R}{R+r}.$$

Během vybíjení kondenzátoru se energie, kterou získal při nabíjení, zcela spotřebuje ve spotřebiči. Během celého cyklu, tedy za dobu $2t_1$, získá spotřebič energii

$$E + E_1 = \frac{1}{2}CU_e^2 \left(1 + \frac{R}{R+r}\right) = \frac{2R+r}{2(R+r)}CU_e^2.$$

Účinnost obvodu je

$$\eta = \frac{E + E_1}{W_z} = \frac{2R+r}{2(R+r)}.$$

Průměrný výkon spotřebiče je

$$P = \frac{E + E_1}{2t_1} = \frac{2R+r}{4t_1(R+r)}CU_e^2.$$

Pro dané hodnoty $\eta = \frac{6}{11} \approx 0,55 = 55 \%$, $P = 5,5 \text{ W}$.

6 bodů

Pokud bychom připojili spotřebič přímo ke zdroji, procházel by obvodem proud $I = U_e/(R+r)$ a výkon spotřebiče by byl

$$P' = RI^2 = \frac{RU_e^2}{(R+r)^2}.$$

Účinnost obvodu by byla $\eta' = \frac{R}{R+r}$.

Pro dané hodnoty $P' = 8,3 \text{ W}$, $\eta' = \frac{1}{11} \approx 9,1 \%$.

Výkon spotřebiče v obvodu s přepínačem a kondenzátorem je poněkud menší, ale účinnost je šestkrát větší.

4 body

Poznámka: Přesným výpočtem bychom zjistili, že za dobu t_1 se kondenzátor nabije na napětí $U_1 = U_e \left(1 - e^{-\frac{t_1}{(R+r)C}}\right) \approx 0,99U_e$ a po přepnutí přepínače se za stejnou dobu vybijí na napětí $U_2 = U_1 e^{-\frac{t_1}{RC}} \approx 0$. Zjednodušující předpoklady v zadání úlohy jsou tedy oprávněné.

- 3.a) Zvolme vztažnou soustavu a označení veličin podle obr. R2. Čas měříme od průchodu počátkem. Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_1 t \cos \alpha_1, \quad y = v_1 t \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} g t^2$$

odvodíme rovnici trajektorie $y = x \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} - \frac{g x^2}{2 v_1^2 \cos^2 \alpha_1}$.

Protože trajektorie prochází bodem $[l, 0]$, platí

$$0 = l \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} - \frac{g l^2}{2 v_1^2 \cos^2 \alpha_1}, \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{lg}{2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1} = \frac{lg}{\sin 2\alpha_1}. \quad (1)$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mg(h - h_0) \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 + 2g(h - h_0). \quad (2)$$

Má-li být tedy rychlost \mathbf{v}_0 co nejmenší, musí to platit i o rychlosti \mathbf{v}_1 . Toho podle (1) dosáhneme když $\alpha_1 = 45^\circ$, $\sin 2\alpha_1 = 1$, $v_1^2 = gl$.

Rovnice trajektorie pak má tvar

$$y = x - \frac{x^2}{l}. \quad (3)$$

Počáteční bod trajektorie musí splňovat podmínku $y = y_0 = -(h - h_0)$. Dosazením do (3) dostaneme kvadratickou rovnici

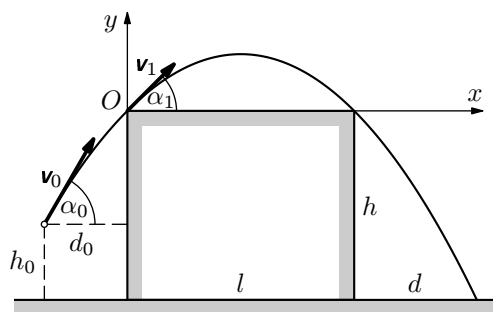
$$\frac{x^2}{l} - x - (h - h_0) = 0. \quad (4)$$

Úloze vyhovuje záporný kořen

$$x_0 = \frac{l - \sqrt{l^2 + 4(h - h_0)l}}{2}.$$

Pro dané hodnoty $d_0 = -x_0 = 2,2 \text{ m}$.

4 body



Obr. R2

- b) Z (1) a (2) plyne $v_0 = \sqrt{gl + 2g(h - h_0)}$.
 Pro dané hodnoty $v_0 = 10,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
 Po celou dobu pohybu má vodorovná souřadnice rychlosti kamene konstantní velikost $v_x = v_1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{2}}$. Pro elevační úhel vrhu platí

$$\cos \alpha_0 = \frac{v_x}{v_0} = \sqrt{\frac{l}{2[l + 2(h - h_0)]}}$$

Pro dané hodnoty $\cos \alpha_0 = 0,5$, $\alpha_0 = 60^\circ$.

2 body

- c) Bod dopadu je určen podmínkou $y = -h$. Dosazením do (3) dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{x^2}{l} - x - h = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$x_d = \frac{l + \sqrt{l^2 + 4hl}}{2}.$$

Pro dané hodnoty $x_d = 9,2 \text{ m}$, $d = 3,2 \text{ m}$.

2 body

- d) Dobu letu kamene určíme ze vztahu

$$t = \frac{x_d - x_0}{v_x} = \frac{\frac{l + \sqrt{l^2 + 4hl}}{2} - (l - \sqrt{l^2 + 4(h - h_0)l})}{\frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{l + 4h} + \sqrt{l + 4(h - h_0)}}{\sqrt{2g}}.$$

Pro dané hodnoty $t = 2,1 \text{ s}$.

2 body

4. Tlak sloupce vzduchu je roven součtu atmosférického tlaku $p_{\text{at}} = h\rho g$ a hydrostatického tlaku sloupce rtuti v trubici

$$p = p_{\text{at}} + (L - l)\rho g = (h + L - l)\rho g,$$

kde ρ je hustota rtuti. Objem uzavřeného vzduchu je $V = Sl$, kde S je obsah průřezu trubice. Počáteční hodnoty stavových veličin jsou

$$T_1, \quad p_1 = \left(h + \frac{L}{2}\right)\rho g, \quad V_1 = S \cdot \frac{L}{2}.$$

Protože teplota trubice se mění pomalu, můžeme předpokládat, že zahřívání vzduchu probíhá jako rovnovážný děj a použít stavovou rovnici ideálního plynu:

$$\frac{(h + L - l)\rho g Sl}{T} = \frac{\left(h + \frac{L}{2}\right)\rho g SL}{2T_1}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

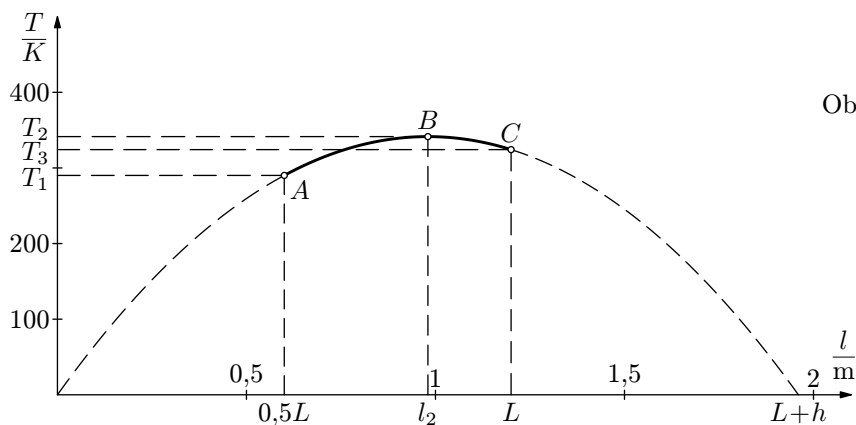
Úpravou dostaneme

$$T = \frac{2T_1}{\left(h + \frac{L}{2}\right)L} [(h + L)l - l^2]. \quad (1)$$

Vztah mezi absolutní termodynamickou teplotou vzduchu v trubici a délkou vzduchového sloupce je popsán kvadratickou funkcí. Jejím grafem (obr. R3) je parabola, která protíná osu l v počátku a v bodě $l = L + h$. Vrchol B paraboly má souřadnice

$$l_2 = \frac{L + h}{2}, \quad T_2 = T_1 \frac{(h + L)^2}{(2h + L)L}.$$

3 body



Obr. R3

Pro dosažení číselných hodnot dostaneme

$$l_2 = 0,98 \text{ m}, \quad T_2 = 341 \text{ K}, \quad t_2 = 68 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Pro sestrojení grafu použijeme rovnici $\{T\} = 355(1,96\{l\} - \{l\}^2)$.

Z grafu vyčteme, že při zahřívání trubice se teplota plynu zvětšuje až do hodnoty T_2 a výška vzduchového sloupce přitom roste, až dosáhne hodnoty l_2 . Závislost l na T v tomto intervalu popisuje vztah, který dostaneme řešením rovnice (1):

$$l = \frac{L + h - \sqrt{(L + h)^2 - \frac{(L + 2h)LT}{T_1}}}{2}.$$

Z termodynamického hlediska se v této části děje teplo přijaté vzduchem v trubici spotřebuje na zvýšení vnitřní energie vzduchu a na práci potřebnou k vypuzení části rtuti z trubice.

Po dosažení teploty T_2 už vnitřní energie vzduchového sloupce dál neroste. Vypuzování rtuti se zrychlí a probíhá i na úkor vnitřní energie vzduchu v trubici. I v této části děje můžeme považovat rozpínání za kvaziorovnovážné. Teplota vzduchu se snižuje podle vztahu (1) a v okamžiku, kdy všechna rtuť opustí trubici, má hodnotu

$$T_3 = \frac{2h}{h + \frac{L}{2}} T_1 = 324 \text{ K}, \quad t_3 = 51 \text{ }^\circ\text{C}.$$

V této části děje závisí délka vzduchového sloupce na klesající teplotě podle vztahu

$$l = \frac{L + h + \sqrt{(L + h)^2 - \frac{(L + 2h)LT}{T_1}}}{2}.$$

4 body

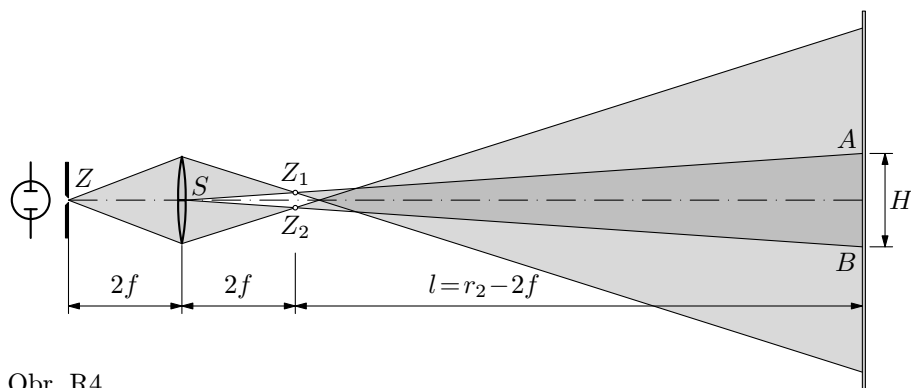
5. Dvojička rozdělí světelné vlnění vystupující ze štěrby Z na dvě koherentní světelná vlnění, která se soustřeďují do obrazů Z_1, Z_2 štěrby (obr. R4). Ty se chovají jako dva koherentní světelné zdroje, ze kterých je osvětleno stínítko. V místech na stínítku, kde se setkávají vlnění z obou zdrojů, se objevuje interferenční jev.

Polohu obrazů Z_1, Z_2 vytvořených dvojičkou určíme užitím zákonů zobrazení tenkou spojkou (obr. R5):

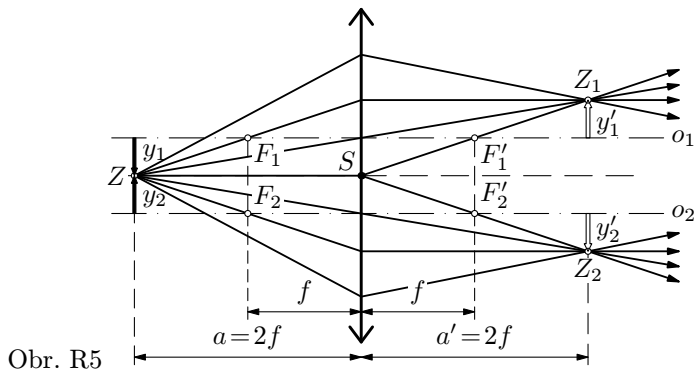
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Rightarrow a' = \frac{af}{a-f}, \quad \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}.$$

Pro $a = 2f, y = -\frac{h}{2}$ dostáváme $a' = a = 2f, y' = -y = \frac{h}{2}$. Zdroje Z_1, Z_2 tedy leží ve vzdálenosti $2f$ od dvojičky a ve vzdálenosti $l = r_2 - 2f$ od stínítka. Jejich vzájemná vzdálenost je $4 \cdot \frac{h}{2} = 2h$.

3 body



Obr. R4



Obr. R5

- a) Polohu interferenčních maxim na stínítku určíme podle obr. R6. V maximu P je dráhový rozdíl $s_2 - s_1$ paprsků přicházejících ze zdrojů Z_1, Z_2 celistvým násobkem vlnové délky světla. Pro souřadnici y maxima platí

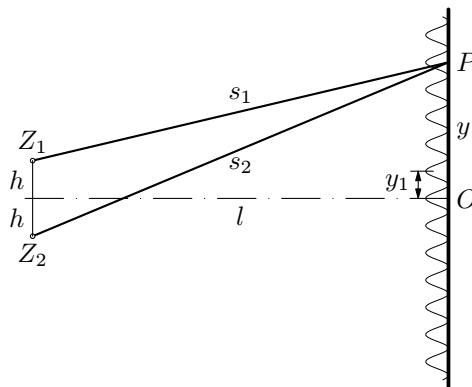
$$s_2 - s_1 = \sqrt{l^2 + (y + h)^2} - \sqrt{l^2 + (y - h)^2} = \\ = l\sqrt{1 + \left(\frac{y + h}{l}\right)^2} - l\sqrt{1 + \left(\frac{y - h}{l}\right)^2} = k\lambda, \quad k \dots \text{celé číslo.}$$

Protože ve skutečnosti $y \ll l$, můžeme psát

$$s_2 - s_1 \approx l \left[1 + \frac{(y + h)^2}{2l^2} \right] - l \left[1 + \frac{(y - h)^2}{2l^2} \right] = \frac{2hy}{l} = k\lambda, \\ y = k \cdot \frac{l\lambda}{2h} = ky_1,$$

kde y_1 je vzdálenost středů sousedních maxim. Pro dané hodnoty vychází $y_1 = 0,66 \text{ mm}$.

4 body



Obr. R6

- b) Šířku H oblasti na stínítku, kde vzniknou interferenční proužky, určíme podle obr. R4. Z podobnosti trojúhelníků SZ_1Z_2 a SAB plyne

$$\frac{H}{2h} = \frac{r_2}{2f} \Rightarrow H = \frac{hr_2}{f}.$$

Pro dané hodnoty vychází $H = 40 \text{ mm}$.

3 body

- 6.a) Moment setrvačnosti tenké tyče o hmotnosti m_1 a délce L je $\frac{1}{12}m_1L^2$. Torzní oscilátor s tyčí zavěšenou na drátu délky l_1 o poloměru r kmitá s periodou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_t}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}m_1L^2}{\frac{\pi Gr^4}{2l_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1L^2l_1}{6\pi Gr^4}}.$$

Z toho $G = \frac{2\pi m_1 L^2 l_1}{3T_1^2 r^4},$

$$s_{\bar{G}} = \bar{G}\sqrt{\left(\frac{s_{\bar{m}_1}}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\bar{L}}}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{l}_1}}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\bar{T}_1}}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{4s_{\bar{r}}}{r}\right)^2}$$

Výsledky měření a výpočtů:

č.	TYČ	DRÁT		KMITY
	L/mm	d/mm	l_1/mm	$5T_1/\text{s}$
1	633	1,04	769	37,5
2	633,5	1,06	768	38,0
3	634	1,05	769	37,8
4	633,5	1,04	770	37,2
5	633,5	1,06	770,5	37,5
6		1,05		37,6
7		1,05		37,6
8		1,05		37,4
9		1,04		37,6
10		1,04		37,5
\bar{x}	633,5	1,048	769,3	37,57
$s_{\bar{x}}$	0,5 *)	0,005 *)	0,5 *)	0,07

$$L = (633,5 \pm 0,5) \text{ mm},$$

$$r = (0,524 \pm 0,003) \text{ mm},$$

$$l_1 = (769,3 \pm 0,5) \text{ mm},$$

$$T_1 = (7,51 \pm 0,02) \text{ s},$$

$$m_1 = 386,6 \text{ g}, s_{\bar{m}_1} \rightarrow 0.$$

$$G = 5,9 \pm 0,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}.$$

*) Respektovány meze přesnosti délkového měřidla $\pm 0,5$ dílku.

- b) Torzní oscilátor tvořený činkou o momentu setrvačnosti J zavěšenou na drátě o délce l_2 a poloměru r kmitá s periodou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_t}}.$$

S užitím výsledku úlohy a) dostaneme

$$J = \frac{Gr^4T_2^2}{8\pi l_2} = \frac{2\pi l_1 m_1 L^2}{3T_1^2 r^4} \cdot \frac{r^4 T_2^2}{8\pi l_2} = \frac{m_1 L^2}{12} \cdot \frac{l_1}{l_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2,$$

$$s_{\bar{J}} = \bar{J}\sqrt{\left(\frac{s_{\bar{m}_1}}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\bar{L}}}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{l}_1}}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{l}_2}}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\bar{T}_1}}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\bar{T}_2}}{T_2}\right)^2}.$$

Výsledky měření a výpočtů:

	DRÁT	KMITY
č.	l_2/mm	$5T_2/\text{s}$
1	760	43.4
2	761	42.9
3	762	43.1
4	762	43.0
5	761	43.2
6		43.0
7		42.8
8		43.2
9		42.4
10		42.8
\bar{x}	761,2	42,98
$s_{\bar{x}}$	0,5 *)	0,09

$$l_2 = (761,2 \pm 0,5); \text{ mm},$$

$$T_2 = (8,60 \pm 0,02) \text{ s}.$$

$$J = (1,71 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- c) Výpočet momentu setrvačnosti činky z rozměrů a hmotnosti

Výsledky měření:

$$D = 65,6 \text{ mm},$$

$$d = 16,0 \text{ mm},$$

$$L = 243,0 \text{ mm},$$

$$m = 2,115 \text{ kg} \dots \text{ hmotnost celé činky}.$$

Výpočty:

$$l_t = L - 2D = 111,8 \text{ mm},$$

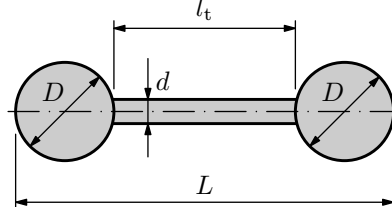
$$m_t = m \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l_t}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l_t + 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3} = 0,1495 \text{ kg} \dots \text{ hmotnost tyčky},$$

$$m_k = \frac{m - m_t}{2} = 0,9823 \text{ kg} \dots \text{ hmotnost koule},$$

$$J' = m_t \left(\frac{l_t^2}{12} + \frac{d^2}{16} \right) + 2 \left[\frac{2}{5} m_k \left(\frac{D}{2} \right)^2 + m_k \left(\frac{L - D}{2} \right)^2 \right] = 0,0165 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$\text{Odchylka výsledků: } \delta = \frac{J - J'}{J} \cdot 100 \% = 3,5 \%.$$

Rozdíl je přijatelný; na odlitku nejsou přesně vymodelovány koule, rozdíl může způsobit i nehomogenita odlitku.



Obr. R7

7. Napětí indukované v cívce určíme podle Faradayova indukčního zákona

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -S\frac{dB}{dt} = -S \cdot B_m\omega(-\sin\omega t) = S \cdot B_m\omega \sin\omega t,$$

2 body

kde S je obsah plochy ohraničené cívkou. Ten můžeme určit integrací.

Archimedovu spirálu získáme otáčením průvodiče, jehož délka r se s úhlem otočení φ rovnoměrně zvětšuje. Platí

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{R}{n \cdot 2\pi} \rightarrow r = \frac{R}{2n\pi}\varphi.$$

Element ohraničené plochy je (obr. R8)

$$dS = \frac{r^2 d\varphi}{2} = \frac{R^2}{8\pi^2 n^2} \varphi^2 d\varphi.$$

Integrací dostaneme

$$S = \frac{R^2}{8n^2\pi^2} \int_0^{2n\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{n\pi R^2}{3}.$$

5 bodů

Napětí indukované v cívce je tedy

$$u_i = \frac{n\pi R^2}{3} \cdot B_m\omega \sin\omega t = \frac{2n\pi^2 R^2 f B_m}{3} \sin\omega t = U_m \sin\omega t.$$

Amplituda napětí je

$$U_m = \frac{2n\pi^2 R^2 f B_m}{3} = 22 \text{ mV}.$$

3 body

Jiný způsob určení obsahu plošného obsahu spirálové cívky:

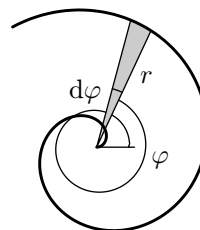
Cívkou si můžeme přibližně nahradit sériově spojenými kruhovými závitů o poloměrech

$$\frac{R}{2n}, 3\frac{R}{2n}, 5\frac{R}{2n}, \dots (2n-1)\frac{R}{2n}.$$

Celkový plošný obsah všech závitů je tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi R^2}{4n^2} [1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots (2n-1)^2] = \frac{\pi R^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1) = \\ &= \frac{\pi R^2}{4n^2} \cdot \frac{n(4n^2-1)}{3} \approx \frac{n\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

Vzorec, podle kterého jsme upravili součet n druhých mocnin lichých čísel, snadno dokážeme matematickou indukcí.



Obr. R8