

Řešení praktické úlohy celostátního kola 49. ročníku FO

Vzorce použité při výpočtech

1. Statická měření

Měření deformací pružiny

$$\Delta y = y_1 - y_0, \quad s(\Delta \bar{y}) = \frac{s(\Delta y)}{\sqrt{n}},$$

Chyba při stanovení Δy je $s'(\Delta \bar{y}) = \sqrt{(s(\Delta \bar{y}))^2 + (\Delta l)^2}$.

$$\Delta y = \Delta \bar{y} \pm s'(\Delta \bar{y}).$$

Analogicky postupujeme při výpočtu prodloužení $\Delta y_x = y_x - y_0$.

1.a Výpočet tuhosti pružiny

$$k = \frac{\Delta F_G}{\Delta y} = \frac{mg}{\Delta y},$$

Relativní chyba při výpočtu tuhosti pružiny je

$$\delta(k) = \delta(\Delta y) = \frac{s'(\Delta \bar{y})}{\Delta \bar{y}}.$$

$$k = \frac{mg}{\Delta \bar{y}} \left(1 \pm \frac{s'(\Delta \bar{y})}{\Delta \bar{y}} \right).$$

1.b Výpočet hmotnosti tělíska

Z linearity deformace ($k = \text{konst.}$) plyne

$$\frac{m_x}{m} = \frac{\Delta y_x}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad m_x = m \frac{\Delta y_x}{\Delta y}.$$

Relativní chyba při výpočtu hmotnosti tělíska je

$$\delta(m_x) = \sqrt{\delta(y_x)^2 + \delta(y)^2} = \sqrt{\left(\frac{s'(\Delta \bar{y}_x)}{\Delta \bar{y}_x} \right)^2 + \left(\frac{s'(\Delta \bar{y})}{\Delta \bar{y}} \right)^2}.$$

$$m_x = m \frac{\Delta \bar{y}_x}{\Delta \bar{y}} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{s'(\Delta \bar{y}_x)}{\Delta \bar{y}_x} \right)^2 + \left(\frac{s'(\Delta \bar{y})}{\Delta \bar{y}} \right)^2} \right].$$

2. Dynamická měření

Měření period kmitů

$$T_1 = \overline{T_1} \pm s(\overline{T_1}), \quad T_x = \overline{T_x} \pm s(\overline{T_x}).$$

2.a Vycházíme ze znalosti k , m_0 , T_x

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m_x + \frac{m_0}{3}}} \Rightarrow m_x + \frac{m_0}{3} = \frac{kT_x^2}{4\pi^2}.$$

Relativní chyba při výpočtu $m_x + \frac{m_0}{3}$ je

$$\delta(m_x + m_0/3) = \sqrt{\delta(k)^2 + (2\delta(T_x))^2} = \sqrt{\left(\frac{s(\overline{k})}{\overline{k}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2}.$$

$$m_x = \frac{\overline{kT_x^2}}{4\pi^2} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{s(\overline{k})}{\overline{k}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2} \right] - \frac{m_0}{3}.$$

2.b Vycházíme ze znalosti m_0 , T_1 , T_x

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m_x + \frac{m_0}{3}}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}} \Rightarrow \frac{m_x + \frac{m_0}{3}}{m + \frac{m_0}{3}} = \frac{T_1^2}{T_x^2},$$

$$m_x + \frac{m_0}{3} = \left(m + \frac{m_0}{3}\right) \frac{T_x^2}{T_1^2}.$$

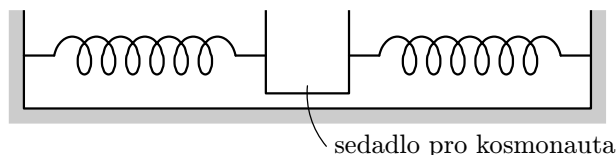
Relativní chyba při výpočtu $m_x + \frac{m_0}{3}$ je

$$\delta(m_x + m_0/3) = \sqrt{(2\delta(T_1))^2 + (2\delta(T_x))^2} = \sqrt{\left(\frac{2s(\overline{T_1})}{\overline{T_1}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2}.$$

$$m_x = \frac{\left(m + \frac{m_0}{3}\right) \overline{T_x^2}}{\overline{T_1^2}} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{2s(\overline{T_1})}{\overline{T_1}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2} \right] - \frac{m_0}{3}.$$

3. Problémová úloha

Kosmonauti se musí vážit na setrvačných vahách konstruovaných např. podle následujícího obrázku. Obě pružiny musí být v rovnovážné poloze napnuté s dostatečným předpětím. Kosmonaut se při vážení na vahách rozkmitá; systém měří periodu kmitů, avšak výstup může být cejchován přímo v jednotkách kg.



Příloha – ukázka naměřených a vypočítaných hodnot

List 1

Řešitel č.

Tělísko č.

KONTROLA VÝPOČTŮ

1. Statická měření

Měření deformací pružiny

	Jedno závaží	Dvě závaží		Jedno závaží a tělísko	
	Výchozí poloha y_0 / mm	Konečná poloha y_1 / mm	Prodloužení $\Delta y = y_1 - y_0$	Konečná poloha y_x / mm	Prodloužení $\Delta y_x = y_x - y_0$
1	51	283	232	389	338
2	52	284	232	390	338
3	53	284	231	390	337
4	54	285	231	391	337
5	53	285	232	391	338

Výpočet chyby prodloužení Δy		Výpočet chyby prodloužení Δy_x	
Aritmet. průměr / mm	231,6	Aritmet. průměr / mm	337,6
Výběr. směrodat. odchylka jednoho měření / mm	0,548	Výběr. směrodat. odchylka jednoho měření / mm	0,548
Výběr. směrodat. odchylka aritmet. průměru / mm	0,245	Výběr. směrodat. odchylka aritmet. průměru / mm	0,245
Chyba měřidla / mm	0,5	Chyba měřidla / mm	0,5
Chyba Δy / mm	0,557	Chyba Δy_x / mm	0,557
$\Delta y = (231,6 \pm 0,6) \text{ mm}$		$\Delta y_x = (337,6 \pm 0,6) \text{ mm}$	

1.a Výpočet tuhosti pružiny		1b. Výpočet hmotnosti m_x	
Aritmet. průměr / $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	2,1179	Aritmet. průměr / g	72,884
Relativní chyba	0,002404	Relativní chyba	0,002915
$k = (2,118 \pm 0,005) \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$		$m_x = (72,88 \pm 0,21) \text{ g}$	

2. Dynamická měření

Měření period kmitů

	$10T_1 / s$	$10T_x / s$
1	9,74	11,71
2	9,8	11,50
3	9,53	11,75
4	9,78	11,62
5	9,64	11,62
6	9,62	11,82
7	9,64	11,71
8	9,72	11,65
9	9,64	11,72
10	9,72	11,66

Výpočet chyby $10T_1$		Výpočet chyby $10T_x$	
Aritmet. průměr / s	9,683	Aritmet. průměr / s	11,676
Výběrová směrodat. odchylka jednoho měření / s	0,083	Výběrová směrodat. odchylka jednoho měření / s	0,087
Výběrová směrodat. odchylka aritmet. průměru / s	0,026	Výběrová směrodat. odchylka aritmet. průměru / s	0,028
$T_1 = (0,9683 \pm 0,0026) s$		$T_x = (1,1676 \pm 0,0028) s$	

2a. Vycházíme ze znalosti k , m_0 , T_x

Výpočet $m_x + m_0/3$

Aritmet. průměr / g	73,14	
Relativní chyba	0,00486	
$m_x + m_0/3 = (73,14 \pm 0,36) g$		$m_x = (72,7 \pm 0,36) g$

2b. Vycházíme ze znalosti m_0 , T_1 , T_x

Výpočet $m_x + m_0/3$

Aritmet. průměr / g	73,34	
Relativní chyba	0,0072	
$m_x + m_0/3 = (73,34 \pm 0,53) g$		$m_x = (72,9 \pm 0,53) g$