Řešení úloh 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 4, 5, 6, 7), T. Denkstein (2),

1. a) Všechny uvažované časy jsou měřené od začátku rovnoměrně zrychlené pohybu vlaku a splňují rovnice

$$l = \frac{1}{2}at_1^2\,, \qquad d = \frac{1}{2}at_2^2\,, \qquad d + l = \frac{1}{2}at_3^2\,, \qquad (1, 2, 3)$$

Z rovnic (1) a (3) s neznámými a a l získáme vyloučením l velikost zrychlení

$$a = \frac{2d}{t_3^2 - t_1^2}\,. \qquad (4)$$

Dosazením do rovnice (1) a úpravou dostaneme délku vlaku

$$l = \frac{t_1^2}{t_3^2 - t_1^2}d = 180\ \mathrm{m}\,.$$

Podobně z rovnic (2) a (4) postupně dostaneme čas výjezdu lokomotivy z tunelu

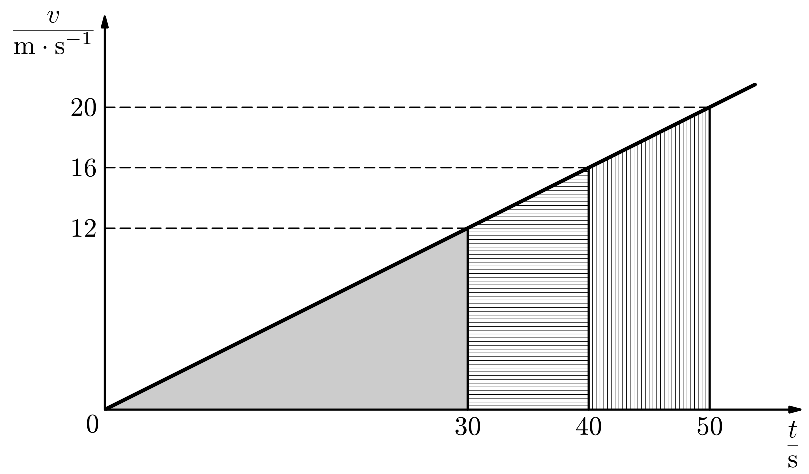
$$t_2 = \sqrt{t_3^2 - t_1^2} = 40\ \mathrm{s}\,.$$

5 bodů

b) K sestrojení grafu přímé úměrnosti stačí najít velikost jedné ze tří rychlostí

$$v_1 = at_1 = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad v_2 = at_2 = 16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad v_3 = at_2 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Délce vlaku v grafu odpovídá obsah trojúhelníku na časovém intervalu $\langle 0; 30\ \mathrm{s}\rangle$ nebo obsah lichoběžníku na časovém intervalu $\langle 40\ \mathrm{s}; 50\ \mathrm{s}\rangle$. Délku tunelu vyjadřuje obsah trojúhelníku na časovém intervalu $\langle 0; 40\ \mathrm{s}\rangle$.



Obr. R1

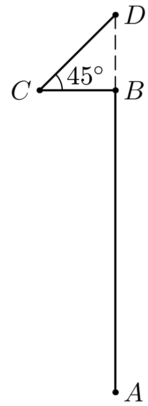
5 bodů

2. a) Pohyb letadla lze podle principu superpozice rozložit na tři části:
úsek AB – pohyb letadla severním směrem po dobu t_1,
úsek BC – pohyb letadla západním směrem po dobu t_2,
úsek CD – unášení letadla větrem po dobu $t_1 + t_2$.
Pořadí úseků v obrázku může být jiné. Volba pořadí nemá vliv na další výpočty.
Je patrné, že úsečky BC a BD mají stejnou velikost. Tedy vzdálenost cíle od místa startu je

$$d = |AB| + |BD| = v_1(t_1 + t_2) = 225\ \mathrm{km}\,.$$

Velikost rychlosti větru je

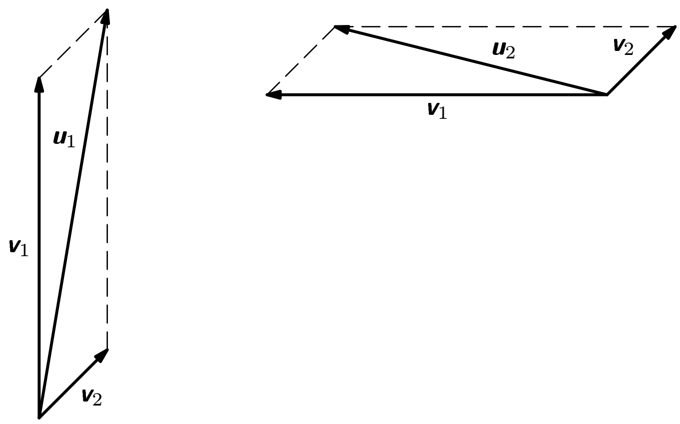
$$v_2 = \frac{|CD|}{t_1 + t_2} = \frac{\sqrt{2}\cdot|BC|}{t_1 + t_2} = \frac{\sqrt{2}\cdot v_1 t_2}{t_1 + t_2} = 51\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}\,.$$



Obr. R2

6 bodů

b) Ve zvoleném měřítku sestrojíme vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, svírající v první fázi letu úhel 45° a v druhé fázi letu úhel 135° a v každém z případů jejich výslednici.



Obr. R3

Velikosti výsledné rychlosti získané měřením by měly odpovídat hodnotám $u_1 = 219\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, $u_2 = 148\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

4 body

3. a) Podle zákona zachování hybnosti pro izolovanou soustavu dvou vagonů platí

$$m_0 v_1 = (m + 2m_0)v\,.$$

Z rovnice plyne

$$m = \frac{v_1 - 2v}{v} m_0\,. \tag{1}$$

Pro $v = 0{,}3v_1$ dostaneme $m = \frac{4}{3}m_0$.

3 body

b) Určíme nejprve poměr mechanických energií soustavy vagonů po srážce a před srážkou. Označme E_k kinetickou energii vagonů před srážkou, E'_k kinetickou energii vagonů po srážce. Pak platí

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(2m_0+m)v^2}{\frac{1}{2}m_0v_1^2}.$$

Po dosazení rovnice (1) a úpravě dostaneme $\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{v}{v_1}$.

Označme mechanickou energii přeměněnou na energii vnitřní $\Delta E = E_\mathrm{k} - E'_\mathrm{k}$. Pak platí

$$\frac{\Delta E}{E_\mathrm{k}} = \frac{E_\mathrm{k} - E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{E_{\mathrm{k}'}}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{v}{v_1} = \frac{v_1 - v}{v_1}.$$

Pro $v = 0{,}3v_1$ dostaneme $\frac{\Delta E}{E_\mathrm{k}} = 0{,}7 = 70\,\%$.

5 bodů

c) Z rovnice (1) pro rychlost soupravy plyne $v = \frac{m_0}{2m_0+m}v_1$.

Pro $m = 0$ (stojící vagon je prázdný) je rychlost soupravy maximální

$$v_\mathrm{max} = \frac{1}{2}v_1.$$

Pro $m = m_\mathrm{max} = 2m_0$ (stojící vagon je maximálně naložený) je rychlost soupravy minimální .

$$v_\mathrm{min} = \frac{1}{4}v_1.$$

2 body

4.a) Nabízejí se dvě varianty řešení:

1. Z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě spojené se zemí působí na kuličku dolů tíhová síla F_G a nahoru síla vlákna F. Jejich výslednicí je dostředivá síla. Platí

$$F_\mathrm{d} = F - F_G \quad \Rightarrow \quad F = F_G + F_\mathrm{d} = mg + m\frac{v^2}{l}. \tag{1}$$

2. Z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s otáčejícím se vláknem působí na kuličku tíhová síla, odstředivá setrvačná síla a síla vlákna, které jsou v rovnováze. Platí

$$F = F_G + F_\mathrm{od} = mg + m\frac{v^2}{l}. \tag{1}$$

Ze zákona zachování mechanické energie $mgl = \frac{1}{2}mv^2$ plyne

$$v^2 = 2gl\,. \qquad (2)$$

Po dosazení rovnice (2) do rovnice (1) a úpravě dostaneme $F = 3mg\,.$

3 body

b) Tentokrát je vychýlená kulička ve výšce h nad její rovnovážnou polohou (obr. R4). Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

plyne

$$v^2 = 2gh\,. \qquad (3)$$

Výška h vychýlené kuličky je nyní závislá na úhlu α vychýlení. Podle obr. R4 úhel splňuje rovnici

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l}\,,$$

z níž vyjádříme výšku

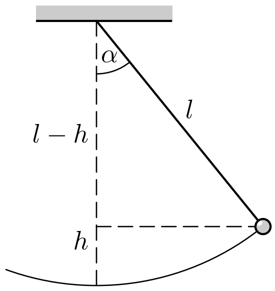
$$h = l(1-\cos\alpha)\,. \qquad (4)$$

Z rovnic (3) a (4) plyne

$$v^2 = 2gl(1-\cos\alpha)\,.$$

Dosazením do rovnice (1) a úpravou dostaneme

$$F = mg(3-2\cos\alpha)\,. \qquad (5)$$



Obr. R4

5 bodů

c) V rovnici (5) položíme $F = 2mg$, $\alpha = \alpha_1$. Z rovnice dostaneme

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \text{a tedy} \quad \alpha_1 = 60^\circ\,.$$

2 body

5. a) Střela jako celek dosáhne v čase $\frac{t_0}{2} = 3{,}0$ s maximální výšky

$$h_0 = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_0}{2}\right)^2 = 44{,}1 \text{ m}\,,$$

v níž má nulovou rychlost. Z této výšky koná spodní část střely svislý vrh dolů po dobu

$$t_{1d} = t_1 - \frac{t_0}{2} = 2{,}0 \text{ s}\,.$$

Z rovnice $h_0 = v_1 t_{1\mathrm{d}} + \frac{1}{2}g t_{1\mathrm{d}}^2$

vypočítáme počáteční rychlost svislého vrhu dolů

$$v_1 = \frac{h_0 - \frac{1}{2}gt_{1d}^2}{t_{1d}} = 12{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 = m_2v_2$ plyne pro počáteční rychlost horní části střely

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = 36{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Ze ze zákona zachování mechanické energie pro horní část střely bezprostředně po oddělení v nejvyšším bodě trajektorie

$$m_2gh_0 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = m_2gh_\mathrm{m}$$

plyne maximální výška

$$h_\mathrm{m} = h_0 + \frac{v_2^2}{2g} = 112\ \mathrm{m}\,.$$

Po oddělení se horní část střely po dobu t_{2n} pohybuje nahoru rovnoměrně zpomaleně do zastavení, poté padá volným pádem z výšky h_m po dobu t_{2d}. Pohyby splňují rovnice

$$v_2 = gt_{2n}\,, \quad h_\mathrm{m} = \frac{1}{2}gt_{2d}^2\,.$$

Celkový čas letu pak je

$$t_2 = \frac{t_0}{2} + t_{2n} + t_{2d} = \frac{t_0}{2} + \frac{v_2}{g} + \sqrt{\frac{2h_\mathrm{m}}{g}} = (3{,}0 + 3{,}7 + 4{,}8)\mathrm{s} = 11{,}5\ \mathrm{s}\,.$$

6 bodů

b) Počáteční rychlost střely je stejná jako v úloze a) a splňuje podmínku

$$v_0 = g\frac{t_0}{2} = 29{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

V okamžiku oddělení je výška střely $h' = v_0t' - \frac{1}{2}gt'^2 = 28{,}2\ \mathrm{m}$

a velikost její rychlosti $v_2' = v_0 - gt' = 17{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Aktivací se rychlost horní části střely zvětší o hodnotu $v_2 = 36{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Doba výstupu od okamžiku oddělení je

$$t_{2n}' = \frac{v_2' + v_2}{g} = 5{,}52\ \mathrm{s}\,.$$

Maximální výška výstupu horní části střely je

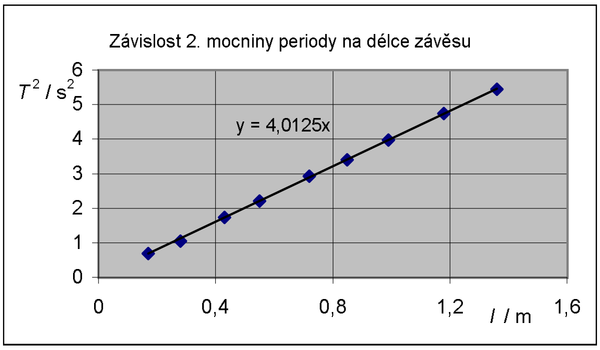
$$h_\mathrm{m}' = h' + \frac{1}{2}gt_{2n}'^2 = 178\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

6. a) Změřením doby 20 kmitů při různých výchylkách dojdeme k závěru: Pokud jsou výchylky podstatně menší než délka závěsu, perioda kmitů je konstantní. Při nesplnění předpokladu se perioda poněkud prodlužuje.

b,c) Příklad naměřených hodnot a jejich zpracování v Excelu jsou v následující tabulce a grafu. Hodnoty ručně měřených časů jsou ponechány bez zaokrouhlení. Ze tří sestrojených grafů splňuje přímou úměrnost pouze graf závislosti $T^2 = kl$. Ze zobrazené rovnice trendu vyčteme směrnici přímky $k = 4{,}0125\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

$\frac{l}{\mathrm{m}}$	$\frac{20T}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{l^2}{\mathrm{m}^2}$	$\frac{T^2}{\mathrm{s}^2}$
0,17	16,59	0,830	0,0289	0,6881
0,28	20,42	1,021	0,0784	1,0424
0,43	26,31	1,316	0,1849	1,7305
0,55	29,72	1,486	0,3025	2,2082
0,72	34,18	1,709	0,5184	2,9207
0,85	36,86	1,843	0,7225	3,3966
0,99	39,9	1,995	0,9801	3,9800
1,18	43,57	2,179	1,3924	4,7459
1,36	46,68	2,334	1,8496	5,4476



d) Pro $g = 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ vychází $k' = 4{,}02\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Hodnoty k a k' se liší ve 3. platné číslici.

e) Závěr: Perioda kmitů kyvadla je přímo úměrná odmocnině z délky závěsu.

7. a) Z 3. Keplerova zákona

$$\frac{r_\mathrm{v}^3}{r_\mathrm{z}^3} = \frac{T_\mathrm{v}^2}{T_\mathrm{z}^2} \tag{1}$$

plyne

$$r_{\mathrm{v}} = r_{\mathrm{z}} \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{v}}^2}{T_{\mathrm{z}}^2}} = 0{,}7232 r_{\mathrm{z}} = 108{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

2 body

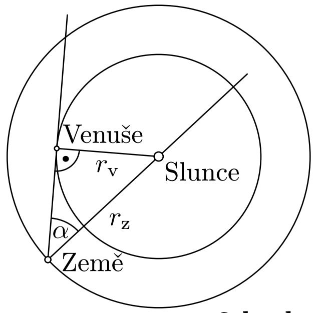
b) Při pohledu ze Země se kruhová trajektorie Venuše promítá na nebeskou klenbu jako úsečka, v jejímž středu se nachází průmět Slunce. V průběhu času se průmět Venuše po této úsečce periodicky pohybuje od jednoho krajního bodu k opačnému. Vlivem rotace Země kolem osy vidíme zdánlivý pohyb nebeské klenby od východu k západu. Nachází-li se Venuše na východ od Slunce, zapadá večer nejprve Slunce a na potemnělé obloze se objevuje Venuše jako Večernice. Nachází-li se Venuše na západ od Slunce, pak se ráno na východě objevuje nejprve Venuše jako Jitřenka a teprve poté vychází Slunce. **2 body**

c) Podle obrázku R5 platí

$$\sin\alpha = \frac{r_{\mathrm{v}}}{r_{\mathrm{z}}}.$$

Užitím rovnice (1) dostaneme

$$\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{v}}^2}{T_{\mathrm{z}}^2}} = 0{,}7232, \qquad \alpha = 46{,}3°.$$



Obr. R5

3 body

d) Stejná vzájemná poloha Země, Venuše a Slunce se opakuje po době, za kterou Venuše získá před Zemí úhlový náskok $\Delta\varphi = 2\pi$ rad. Platí:

$$\Delta\varphi = (\omega_{\mathrm{v}} - \omega_{\mathrm{z}})T\,,$$

kde $\omega_{\mathrm{v}} = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{v}}}$, $\omega_{\mathrm{z}} = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{z}}}$ jsou úhlové rychlosti Země a Venuše. Po dosazení dostaneme

$$2\pi = \left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{v}}} - \frac{2\pi}{T_{\mathrm{z}}}\right)T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_{\mathrm{z}}T_{\mathrm{v}}}{T_{\mathrm{z}} - T_{\mathrm{v}}} = 583{,}46\ \mathrm{d}\,.$$

Alternativní řešení: Situace se opakuje za dobu, za kterou Venuše vykoná o jeden oběh více než Země. Platí:

$$NT_{\mathrm{z}} = (N+1)T_{\mathrm{v}}\,, \quad \Rightarrow \quad N = \frac{T_{\mathrm{v}}}{T_{\mathrm{z}} - T_{\mathrm{v}}}\,.$$

Hledaná doba je $T = NT_{\mathrm{z}} = \frac{T_{\mathrm{z}}T_{\mathrm{v}}}{T_{\mathrm{z}} - T_{\mathrm{v}}}$. **3 body**