Řešení úloh krajského kola 51. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autor úloh: P. Šedivý

1. a) Označme t_1 dobu, která uplynula od začátku pádu do vzniku prvního snímku a s_1 dráhu květináče v čase t_1. Dále označme $T = 0{,}04$ s periodu, se kterou pracuje kamera a $d = d_2 - d_1 = 0{,}55$ m vzdálenost obou poloh květinace zachycených kamerou. Platí

$$s_1 = h_1 + d_1 = \frac{1}{2}gt_1^2, \qquad h_1 + d_2 = \frac{1}{2}g(t_1 + T)^2.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$d = gt_1T + \frac{1}{2}gT^2, \qquad t_1 = \frac{d - \frac{1}{2}gT^2}{gT} = \frac{d}{gT} - \frac{T}{2} = 1{,}38 \text{ s}.$$

Květináč padal z výšky

$$h_1 = s_1 - d_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 - d_1 = 9{,}36 \text{ m} - 0{,}40 \text{ m} \doteq 9{,}0 \text{ m}.$$

5 bodů

b) Rychlost květináče měla v čase t_1 velikost

$$v_1 = gt_1 = \frac{d}{T} - \frac{gT}{2} = 13{,}55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

c) Velikost v_2 rychlosti květináče při dopadu na chodník můžeme určit užitím zákona zachování energie:

$$mg(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad \to \qquad v_2 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} = 24{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

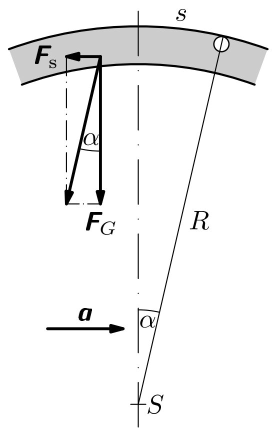
3 body

2. a) Řešení provedeme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s rozjíždějícím se vlakem. Na částice vody v trubici působí kromě tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ ještě setrvačná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}$. Pro odchylku α jejich výslednice od svislého směru platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{a}{g}$$

Vztlaková síla působící na bublinku má opačný směr a bublinka se přemístí do místa, kde je stěna trubice k ní kolmá. Z obrázku R1 je zřejmé, že se bublinka posune ve směru, kterým je orientováno zrychlení. Při rozjíždění vlaku tedy dopředu.

4 body



Obr. R1

b) Z obr. R1 dále plyne pro velikost úhlu α v radiánech

$$\alpha = \frac{s}{R}.$$

Pak

$$a = g \operatorname{tg}\alpha = g \operatorname{tg}\frac{s}{R}.$$

Pro dané hodnoty je $\alpha = 0{,}0825$ rad $\approx 4{,}73°$, $a = 0{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

6 bodů

Poznámka: Protože úhel α je malý, platí $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ a k dostatečně přesnému výsledku lze dojít i užitím aproximace

$$a \approx g\alpha = \frac{gs}{R}.$$

3. a) Teplotu t_2' chladnějšího kalorimetru po přilití vody z teplejšího kalorimetru a zamíchání určíme z kalorimetrické rovnice:

$$m(t_1 - t_2') = M(t_2' - t_2) \qquad \Rightarrow \qquad t_2' = \frac{Mt_2 + mt_1}{M + m}.$$

Podobně určíme teplotu t_1' teplejšího kalorimetru po přilití vody z chladnějšího kalorimetru:

$$(M - m)(t_1 - t_1') = m(t_1' - t_2') = mt_1' - \frac{Mmt_2 + m^2 t_1}{M + m},$$

$$Mt_1' = (M - m)t_1 + \frac{Mmt_2 + m^2 t_1}{M + m} = \frac{M^2 t_1 + Mmt_2}{M + m},$$

$$t_1' = \frac{Mt_1 + mt_2}{M + m}.$$

Rozdíl teplot se zmenší na

$$t_1' - t_2' = \frac{M(t_1 - t_2) - m(t_1 - t_2)}{M + m} = (t_1 - t_2)\frac{M - m}{M + m} = 16{,}4\ ^\circ\mathrm{C},$$

tedy na 82 % původní hodnoty.

5 bodů

b) Při prvním přelití vody o hmotnosti m tam a zpět se teplotní rozdíl mezi kalorimetry zmenšil $t_1' - t_2' = (t_1 - t_2) \cdot k$, kde $k = \dfrac{M - m}{M + m} = 0{,}\overline{81}$.
Při vícenásobném opakování procedury se teplotní rozdíl zmenší na

$$t_1'' - t_2'' = (t_1' - t_2') \cdot k = (t_1 - t_2) \cdot k^2,$$

$$t_1''' - t_2''' = (t_1'' - t_2'') \cdot k = (t_1 - t_2) \cdot k^3,$$

atd. Má-li se po $n$tém přelití vody o hmotnosti m tam a zpět teplotní rozdíl zmenšit pod Δt, musí platit

$$(t_1 - t_2) \cdot k^n < \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad n \cdot \ln k < \ln \frac{\Delta t}{t_1 - t_2},$$

$$n > \frac{\ln \dfrac{\Delta t}{t_1 - t_2}}{\ln k} = 14{,}9.$$

Proceduru musíme zopakovat 15krát.

5 bodů

4. a) Označme m hmotnost tělesa a M hmotnost tyče. Z momentové věty plyne

$$mgx_0 = Mg(d - x_0),$$

$$(mg - V\varrho_1 g)x_1 = mg\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\right)x_1 = Mg(d - x_1).$$

Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\frac{x_1}{x_0} = \frac{d - x_1}{d - x_0},$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = 1 - \frac{x_0(d - x_1)}{x_1(d - x_0)} = \frac{d(x_1 - x_0)}{x_1(d - x_0)},$$

$$\varrho = \varrho_1 \frac{x_1(d - x_0)}{d(x_1 - x_0)}.$$

Pro dané hodnoty $\varrho = 2\,530\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

5 bodů

b) Pokud bychom úkol a) řešili s kapalinou o hustotě ϱ_2, dostali bychom vztah

$$\varrho = \varrho_2 \frac{x_2(d - x_0)}{d(x_2 - x_0)}.$$

Porovnáním obou výsledků dostaneme

$$\varrho_2 x_2(x_1 - x_0) = \varrho_1 x_1(x_2 - x_0),$$

$$x_2 = \frac{\varrho_1 x_1 x_0}{\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_0 - \varrho_2 x_1}.$$

Pro dané hodnoty $x_2 = 270\ \mathrm{mm}$.

5 bodů