

### Řešení úloh krajského kola 51. ročníku fyzikální olympiády.

*Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3), I. Volf a M. Jarešová (4),

1.a) Z grafu plyne:

$$a_1 = \frac{20 - 0}{14 - 6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a_2 = \frac{15 - 0}{40 - 32} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \frac{15}{8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a_3 = \frac{25 - 15}{52 - 40} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \frac{5}{6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**3 body**

b) Vzdálenost mezi vozidly je maximální v čase  $t_m = 46$  s, kdy při rozjíždění dosáhne druhé vozidlo velikosti rychlosti prvního vozidla. **1 bod**

c) Vzdálenost mezi vozidly se zvětšovala od času 6 s do času 46 s, za tuto dobu 40 s urazilo první vozidlo rovnoměrným pohybem dráhu

$$s_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 40 \text{ s} = 800 \text{ m}.$$

Druhé vozidlo za stejnou dobu urazilo dráhu během brzdění

$$s_1 = \frac{20(14 - 6)}{2} \text{ m} = 80 \text{ m}.$$

a během rozjíždění

$$s_2 = \frac{15(40 - 32)}{2} \text{ m} + \frac{(15 + 20)(46 - 40)}{2} \text{ m} = 165 \text{ m}.$$

Maximální vzdálenost mezi vozidly je dána rozdílem drah

$$d_m = s_0 - (s_1 + s_2) = 800 \text{ m} - (80 \text{ m} + 165 \text{ m}) = 555 \text{ m}.$$

**3 body**

d) V čase  $t_m = 46$  s se začíná druhé vozidlo přibližovat k prvnímu, nejprve rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu 6 s, poté rovnoměrným pohybem rychlostí  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Rovnoměrně zrychleným pohybem se přiblíží o vzdálenost

$$\frac{(25 - 20)(52 - 46)}{2} \text{ m} = 15 \text{ m}.$$

tedy v čase 52 s je okamžitá vzdálenost vozidel  $555 \text{ m} - 15 \text{ m} = 540 \text{ m}$ . Vzájemnou rychlostí  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  se pak vozidla přibližují po dobu  $\frac{540}{5} \text{ s} = 108 \text{ s}$ . K dojetí dojde v čase  $t_k = 52 \text{ s} + 108 \text{ s} = 160 \text{ s}$ .

**3 body**

- 2.a) Pro rozhodnutí stačí buď vypočítat výšku prvního vrhu, nebo dobu letu druhého míčku:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1,3^2 \text{ m} = 8,3 \text{ m},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{9,81}} \text{ m} = 1,9 \text{ s}.$$

Z porovnání s údaji ze zadání plyne, že z vyššího okna házel druhý chlapec.

**1 bod**

- b) Počáteční rychlost prvního míčku je  $v_{01} = \frac{d}{t_1} = \frac{24}{1,3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pro počáteční rychlost druhého míčku platí  $v_{02} = \frac{d}{t_2}$ , kde  $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$ .

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$v_{02} = d\sqrt{\frac{g}{2h_2}} = 24\sqrt{\frac{9,81}{2 \cdot 18}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**4 body**

- c) První míček má v okamžiku dopadu složky rychlosti

$$v_{x1} = v_{01} = \frac{d}{t_1}, \quad v_{y1} = gt_1.$$

Rychlost dopadu má velikost

$$v_{d1} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} + (gt_1)^2} = 22,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

U druhého vrhu z rovnic  $h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$ ,  $v_{y2} = gt_2$  vyloučením času dostaneme svislou složku rychlosti při dopadu  $v_{y2} = \sqrt{2gh_2}$ .

Rychlost dopadu má velikost

$$v_{d2} = \sqrt{v_{02}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{\frac{gd^2}{2h_2} + 2gh_2} = \sqrt{g\left(\frac{d^2}{2h_2} + 2h_2\right)} = 22,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**4 body**

- d) Svislá složka rychlosti dopadu roste s výškou vrhu, vodorovná složka rychlosti, tedy velikost počáteční rychlosti potřebné k dosažení daného místa dopadu, se zmenšuje. Jejich složením při vrhu z různých výšek můžeme dostat stejnou hodnotu.

**1 bod**

3.a) První vagón má kinetickou energii  $E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2$ ,

$$\text{druhý } E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}mv^2.$$

$$\text{Poměr energií je } \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{4}{3}.$$

Větší kinetickou energii má první vagón, a to  $\frac{4}{3}$ krát.

**2 body**

b) Velikost hybnosti prvního vagónu je  $p_1 = mv$ , druhého  $p_2 = 3m \cdot \frac{v}{2} = \frac{3}{2}mv$ .  
Druhý vagón má větší velikost hybnosti než první, proto se po srážce bude souprava pohybovat ve směru pohybu druhého vagónu.

**1 bod**

c) Ze zákona zachování hybnosti  $\frac{3}{2}mv - mv = (3m + m)u$  dostaneme  $u = \frac{1}{8}v$ .

**2 body**

d) Poměr kinetické energie soupravy po srážce a kinetické energie vagónů před srážkou je

$$\frac{E'_k}{E_{k1} + E_{k2}} = \frac{\frac{1}{2}(m + 3m)u^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2} = \frac{2m \left(\frac{v}{8}\right)^2}{\frac{7}{8}mv^2} = \frac{1}{28}.$$

Na vnitřní energii se tak přemění  $\frac{27}{28}$  původní kinetické energie obou vagónů.

**3 body**

e) V každém okamžiku v průběhu nárazu vagóny na sebe působí podle zákona akce a reakce silou stejné velikosti, proto bude deformace pružin v každém okamžiku stejná.

**2 body**

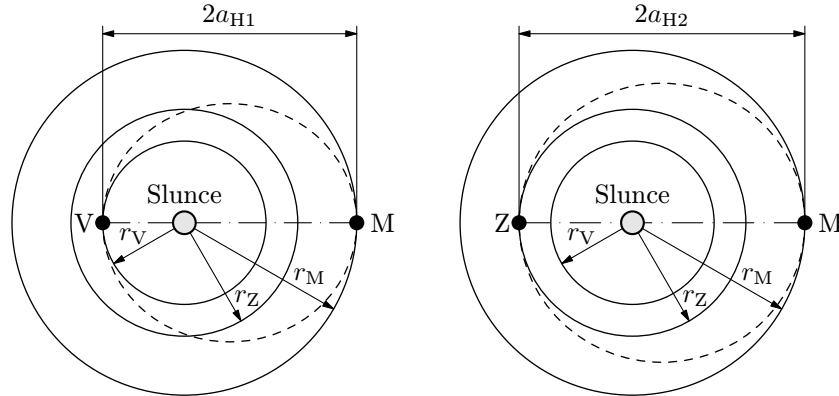
4.a) Podle 3. Keplerova zákona platí:

$$1. \text{ Pro dobu oběhu Marsu } \frac{T_Z^2}{T_M^2} = \frac{a_Z^3}{a_M^3}, \text{ z čehož } T_M = \sqrt{\left(\frac{a_M}{a_Z}\right)^3} T_Z = 684 \text{ dní,}$$

$$2. \text{ Pro dobu oběhu Venuše } \frac{T_Z^2}{T_V^2} = \frac{a_Z^3}{a_V^3}, \text{ z čehož } T_V = \sqrt{\left(\frac{a_V}{a_Z}\right)^3} T_Z = 223 \text{ dní.}$$

**4 body**

b) Hohmannovy trajektorie pro obě situace jsou znázorněny na obr. R1, R2.



Obr. R1 Mars – Venuše

Obr. R2 Mars – Země

Podle obr. R1 je délka hlavní poloosy Hohmannovy elipsy pro let na Venuši rovna

$$a_{H1} = \frac{1}{2}(r_V + r_M) = \frac{1}{2}(0,72 + 1,52) \text{ AU} = 1,12 \text{ AU}.$$

Analogicky pro let na planetu Zemi (obr. R2) platí

$$a_{H2} = \frac{1}{2}(r_Z + r_M) = \frac{1}{2}(1 + 1,52) \text{ AU} = 1,26 \text{ AU}.$$

**2 body**

c) Označme indexem Z údaje pro Zemi, tj.  $a_Z = r_Z = 1 \text{ AU}$ ,  $T_Z = 365 \text{ dní}$ . Pro let z Marsu na Venuši můžeme podle 3. Keplerova zákona psát  $\frac{T_{H1}^2}{T_Z^2} = \frac{a_{H1}^3}{a_Z^3}$ . Potom je doba letu z Marsu na Venuši rovna

$$T_{L1} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{H1}}{a_Z}\right)^3} T_Z = 216 \text{ dní}.$$

Analogicky pro let z Marsu na Zemi můžeme psát

$$T_{L2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{H2}}{a_Z}\right)^3} T_Z = 258 \text{ dní}.$$

**4 body**