Úlohy a řešení pro 52.ročník FO – kategorie G – Archimédiáda

Tento materiál je určen pro opravující protokolů o řešení úloh Archimédiády. Na základě tohoto řešení může učitel fyziky informovat své žáky.

FO52G1: Kolik naložíme?

Automobilový přívěs, který využívají chalupáři k přepravě materiálu, má nákladovou plochu o rozměrech: šířka 1,40 m, délka 1,60 m a výška hrazení 40 cm. Přívěs má nosnost 560 kg.

a) Na přívěsu je třeba přepravit písek pro stavební úpravy. Do jaké výšky lze sypat na přívěs písek, aby nebyl přívěs přetížen? Hustota suchého písku 1500 kg/m^3.

Objem ložné plochy až po vršek hrazení přívěsu je 0,896 m^3, kdyby se naložil písek o hustotě 1500 kg/m^3 až do vrchu, bude ho na přívěsu 1344 kg, přívěs bude přetížen.

Obsah dna přívěsu je S = 1,6 · 1,4 m^2 = 2,24 m^2, písek o hmotnosti 560 kg zaujímá objem V = 560/1500 m^3 = 0,373 m^3. Aby hmotnost naloženého písku byla pouze 560 kg, lze ho nasypat jen do výšky $h = V/S$ = 0,166 m ≈ 17 cm.

b) Během cesty řidič zastavil na svačinu, avšak začalo pršet tak, že spadlo 20 mm/m^2. Voda se vsákla do písku. Jak se změnila hmotnost nákladu a jaká byla hustota mokrého písku?

Když napadne vody 20 mm/m^2, neboli 20 litrů na m^2, pak na plochu přívěsu o obsahu S = 2,24 m^2 napadne 44,8 litru vody, která zvýší hmotnost nákladu o m_v = 1000 · 0,0448 kg ≈ 45 kg. Celková hmotnost mokrého písku poté bude m' = 560 + 45 kg = 605 kg a přívěs bude mírně přetížen. Protože se objem písku po vsáknutí vody nezměnil, jeho hustota po dešti bude $\rho' = m'/V$ = 1621 kg/m^3

c) Řidič při další cestě do prodejny stavebnin nakoupil několik betonových sloupů na stavbu plotu. Výška sloupků byla 180 cm, jejich čtvercový kolmý řez měl délku strany 20 cm, hustota betonu je 2400 kg/m^3. Kolik sloupků mohl řidič naložit na přívěs a jak je uložil?

Jeden sloupek bude mít objem V_s = 1,80 · 0,2 · 0,2 = 0,072 m^3, hmotnost $m_s = \rho_s \cdot V_s$ = 2400 · 0,072 = 172,8 kg, na jedno převezení lze naložit jen 560/m_s ≈ 3, tj. tři sloupky a díky své délce budou trochu přesahovat přes okraj ložné plochy.

d) Na plot musel řidič dovést ještě tyčky. Zvolil délku tyček 155 cm, každá tyčka měla tloušťku 2,5 cm a šířku 5,0 cm, hustota suchého dřeva je 400 kg/m^3. Kolik tyček mohl řidič naložit na přívěs, když ho tyčkami právě naplnil? Jestliže při stavbě plotu dodržoval vzdálenost mezi tyčkami 7,5 cm, jak dlouhý plot mohl z jedné přivezené dávky sestavit?

Jedna laťka má objem V_l = 1,55 · 0,025 · 0,05 = 0,0019375 m^3 a hmotnost $m_l = \rho_l \cdot V_l$ = 0,775 kg. Co do zatížení by se mohlo naložit 560/0,775 ≈ 722 latěk. Pokud jde o uložení, pak se kladou laťky po délce (155 cm < 160 cm), na dno se jich vejde 1,4/0,05 = 28, na výšku 40/2,5 = 16 vrstev, tedy nejvýše 28 · 16 = 448 latěk s celkovou hmotností 448 m_l ≈ 350 kg. Je-li řidič hazardér, může ještě využít na naložení sloupků zbývající úzkou štěrbinu. Naložit sloupky lze samozřejmě i jiným způsobem.

Plot tvořený 448 laťkami a 447 mezerami má délku 448 · 0,05 + 447 · 0,075 ≈ 56 m.

FO52G2: Noční jízda F1

V roce 2009 byly zahájeny první mezinárodní závody Formule 1 při umělém osvětlení. Trasa byla připravena v Singapuru. Jedno kolo má délku 5,073 km a jede se 61krát. Při závodech v roce 2009 dosáhl vítěz Lewis Hamilton z týmu Vodafone McLaren Mercedes celkového času 1 h 56 min 06,337 s. Nejrychlejší v jednom kole byl Fernando Alonso z týmu Renault s časem 1 min 48,24 s.

a) Jaké průměrné doby jízdy v jednom kole dosáhl vítěz závodu ?

Celkový čas vítěze Lewise Hamiltona 1 h 56 min 06,337 s odpovídá 116,1 min (nebo 1,935 h), na jedno kolo potřeboval průměrně 1,903 min, tj. asi = 1 min 54 s neboli 0,0317 h. Dosahoval průměrné rychlosti v_H = 5,073/0,0317 = 159,9 km/h = 160 km/h.

b) Jakého výsledku by dosáhl druhý jmenovaný závodník, kdyby udržel nejrychlejší tempo?

Další závodník Fernando Alonso dosáhl v nejrychlejším kole čas 1 min 48,24 s ≈ 0,03007 h a rychlost v_A = 5,073/0,03007 = 168,7 km/h, kdyby udržel toto nejrychlejší tempo, pak by celkový čas byl t_A = 0,03007 · 61 = 1,83 h = 1 h 50 min.

c) Jaká byla průměrná rychlost obou závodníků na trase?

Průměrnou rychlost Lewise Hamiltona jsme spočítali v části a) tj. asi 160 km/h, pro další informaci týkající se Fernanda Alonso je nutné podívat se na internet – dosáhl času o 16,6 s horšího než Hamilton, tj. asi 1,9397 h, jeho průměrná rychlost byla v_A = 159,5 km/h, tedy prakticky také 160 km/h.

d) Prohlédni si stránky http://www.singaporegp.sg/ a vysvětli, proč nemůže závodník jet stále největší rychlostí.

Závody F1 v Singapuru se konají v městské zástavbě, je tam několik prudkých zatáček, a tak nemohou závodníci jet stále největší rychlostí, které dosáhnou na zcela přímém úseku trati.

FO52G3: Předjíždění autobusů

V některých městech jezdí kloubové autobusy, jejichž délku odhadneme na 20 m. Představte si, že po dvouproudé, dosti dlouhé přímé silnici jede takový autobus stálou rychlostí 45 km/h a za ním v bezpečné vzdálenosti další autobus povolenou rychlostí 63 km/h. Řidič druhého autobusu se rozhodl předjíždět. Když se dostal do vzdálenosti 15 m za zadní část prvního autobusu, vybočil z pravého jízdního pruhu, předjel první autobus a zařadil se zpět do pruhu tak, že vzdálenost mezi autobusy byla 10 m.

a) Jak dlouho trvalo předjíždění autobusů?

b) Jakou dráhu při předjíždění urazily jednotlivé autobusy?

K řešení si nakresli obrázek nebo vystřihni model autobusů ve tvaru obdélníka a situaci znázorni k lepšímu pochopení (i v druhém případě načrtni v protokolu řešenou situaci).

Rychlosti obou autobusů převedeme na m/s: 63 km/h = 17,5 m/s, 45 km/h = 12,5 m/s. Při vzájemném předjíždění dvou kloubových autobusů můžeme použít jedné ze dvou následujících metod.

I. „Zastavíme“ předjížděný autobus a řešíme problém pro vzájemnou rychlost obou autobusů 17,5 m/s – 12,5 m/s = 5,0 m/s. Druhý autobus musí ujet vzhledem k prvnímu: vzdálenost mezi nimi 15 m, dospět na úroveň prvního 20 m, předjet první 20 m, předjet do vzdálenosti 10 m, tj. navíc celkem 65 m vzájemnou rychlostí 5 m/s, předjíždí proto pod dobu 65/5 = 13 s. Za tuto dobu projede předjíždějící autobus 13 s · 17,5 m/s = 227,5 m, předjížděný 13 s · 12,5 m/s = 162,5 m, rozdíl drah je 65 m.

II. Při druhém způsobu řešení určíme dráhy obou autobusů a jejich rozdíl je roven 65 m.

FO52G4: Pohyb motocyklu při tréninku

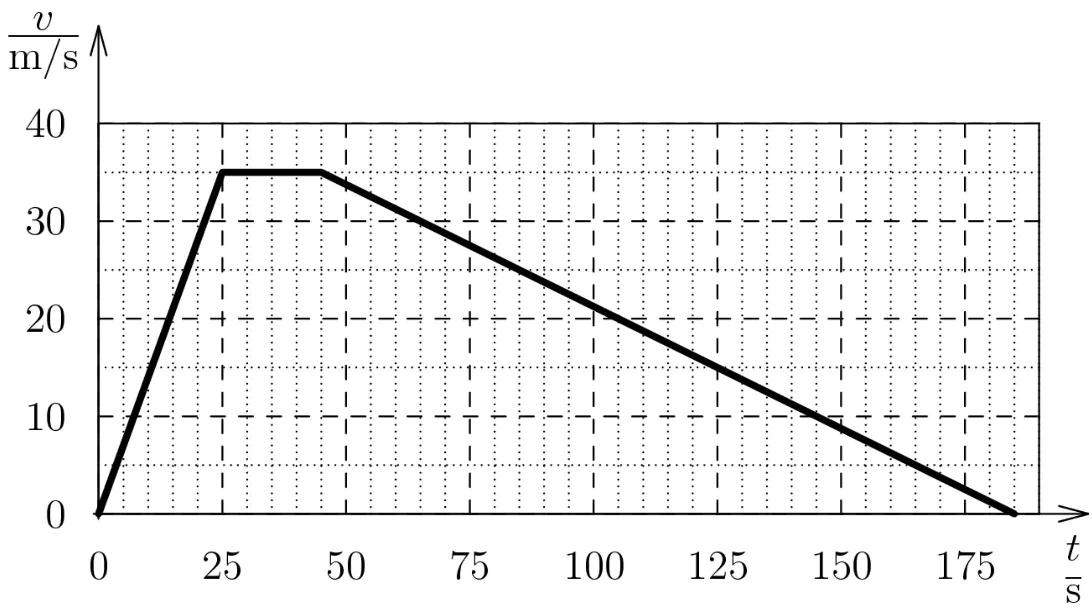
Úloha se týká pohybu motocyklu, jehož rozměry jsou poměrně malé vzhledem k dalším vzdálenostem, a proto si ho můžeme představit jen jako bod. Při tréninku na závody vyráží motocykl z klidu a po době 25 s dosáhne okamžité rychlosti 126 km/h. Touto rychlostí se bude dále pohybovat po trase 700 m, když začne zpomalovat tak, že jeho rychlost se zmenšuje přímo úměrně s časem, a po době 140 s zastaví přesně na místě, z něhož vyrazil, tedy přesně po absolvování jednoho okruhu závodní trasy.

a) Zjisti, jak dlouho pojede motocykl stálou rychlostí.

Maximální rychlost motocyklu je podle zadání 126 km/h = 35 m/s. Motocykl jede stálou rychlostí na druhém úseku po dobu t_2 = (700 m)/(35 m/s) = 20 s.

b) Načrtni graf změn rychlosti v závislosti na čase, $v(t)$.

Víme, že se motocykl rozjíždí po dobu t_1 = 25 s, rovnoměrně se pohybuje po dobu t_2 = 20 s, zpomaluje po dobu t_3 = 140 s. Nejvyšší dosažená rychlost je v = 35 m/s. Odtud nakreslíme příslušný graf.



c) Urči délku trasy, kterou motocyklista urazil, a průměrnou rychlost, které dosáhl.

Dráhy, které motocykl urazí: při rozjíždění $s_1 = v \cdot t_1/2 = 35 \cdot 25/2$ m $= 437{,}5$ m, rovnoměrným pohybem s_2 =700 m, při zpomalování $s_3 = v \cdot t_3/2 = 35 \cdot 140/2$ m $= 2450$ m, jeden okruh má tedy délku $s = s_1 + s_2 + s_3 = 3587{,}5$ m. Celkový čas pak je $t = t_1 + t_2 + t_3 = 185$ s. Průměrná dosažená rychlost je $v_p = s/t = 3588/185 = 19{,}40$ m/s = 69,8 km/h.

d) Porovnej, jak by se změnila dráha rozjíždění, kdyby se motocyklista rozjížděl pouze 20 s, jak by se změnila dráha rovnoměrného pohybu a doba pro její absolvování, a tedy i výsledky pro jedno zkušební kolo závodu.

Kdyby se rozjížděl automobil jen 20 s, byla by dráha rozjezdu $35 \cdot 20/2 = 350$ m, tedy o 87,5 m kratší, o což by se prodloužila dráha rovnoměrného pohybu i doba průjezdu po ní o 87,5/35 s = 2,5 s. Celková doba průjezdu trati by byla o 2,5 s kratší. průměrný rychlost by byla 19,66 m/s = 70,8 km/h.

FO52G5: Určování těžiště rovinných obrazců

Těžiště tenké desky je bod, v němž lze zavěsit nebo podepřít tuto desku, aby zůstala v určité, volné rovnovážné poloze. Naším úkolem je stanovit experimentálně těžiště několika desek pravidelného nebo i nepravidelného tvaru, které si k experimentu sám(a) připravíš:

a) Urči těžiště tenké desky, kterou si vyrobíš ze vhodného materiálu (tenký plech, tvrdý papír, sololit, plast) – tvar trojúhelníku, obdélníku, lichoběžníku, kruhu, elipsy, nepravidelný tvar).

b) K poloze těžiště můžeme dospět také na základě průsečíku těžnic (těžnice je ve fyzice na rozdíl od matematiky každá přímka, procházející těžištěm). Sestrojíš si především olovnici.

Tenkou desku zvoleného tvaru (pravidelného či nepravidelného) opatříš na okraji několika malými otvory, jimiž lze protáhnout tenkou nit (nejlépe režná nit) a můžeš zavěsit tuto desku tak, aby byla ve svislé poloze. Pomocí olovnice stanovíš svislou těžnici. V průsečíku dvou, popř. tří těžnic najdeš těžiště (vysvětli, proč je lepší, budou-li těžnice alespoň tři).

c) Sestroj z téhož materiálu tenkou desku tvaru České republiky, Slovenska, Rakouska, Polska, Evropy… Některou z výše uvedených metod zjisti, kde je těžiště zvoleného útvaru, a vysvětli, proč by bylo vhodné tam umístit hlavní město.

Další kolo soutěže Archimédiáda probíhá podle instrukcí učitele fyziky na škole, popř. podle instrukcí předsedy okresní komise Fyzikální olympiády v daném regionu.
Po ukončení soutěže Archimédiáda mají soutěžící možnost pokračovat v příštím školním roce v následných kategoriích F, popř. E Fyzikální olympiády.
Přejeme hodně úspěchů při řešení náročnějších fyzikálních problémů, než jsou ty, s nimiž se můžete setkat ve výuce fyziky. Ve Fyzikální olympiádě nejde jen o to, že víte, které vzorce při řešení použít – ale především o to, abyste dospěli úvahami k tomu, jak problém vyřešit.
Pokud máte připomínky k obsahové náplni či k formální stránce zadávaných úloh, ozvěte se mi na adresu ivo.volf@uhk.cz.

Prof. RNDr. Ivo Volf, CSc., předseda ÚKFO