Řešení úloh krajského kola 53. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: M. Jarešová (1), J. Thomas (2), Z. Polák (3), P. Šedivý (4)

1. a) Pro souřadnice polohy kamene platí

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Pro složky rychlosti pohybu kamene platí

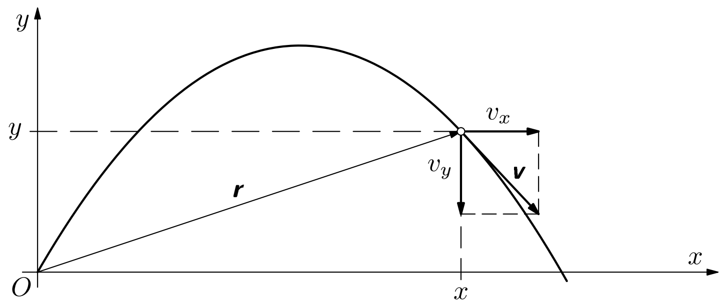
$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Potom $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin\alpha + g^2 t^2}$.

3 body

b) Aby se kámen trvale vzdaloval od počátku, musí být $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$, a tedy

$$x \cdot v_x + y \cdot v_y = \frac{1}{2} t (2v_0^2 - 3v_0 g t \sin\alpha + g^2 t^2) \geq 0.$$



Obr. R1

2 body

Má-li výše uvedená nerovnice platit pro všechna t, pak kvadratická nerovnice $2v_0^2 - 3v_0 g t \sin\alpha + g^2 t^2 \geq 0$ by neměla mít v oboru reálných čísel žádný kořen, tj. $D = 9v_0^2 g^2 \sin^2\alpha - 8v_0^2 g^2 \leq 0$, což je splněno za podmínky, že $\sin\alpha \leq \sqrt{\frac{8}{9}}$. Kámen se tedy bude trvale vzdalovat od počátku, bude-li splněna podmínka $\alpha \leq 70{,}5°$.

Poznámka

Tuto část lze také řešit užitím vyšší matematiky. Má-li se kámen trvale vzdalovat od počátku, musí být $\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} \geq 0$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} = 2v_0^2 t - 3v_0 g t^2 \sin\alpha + g^2 t^3 = t(2v_0^2 - 3v_0 g t \sin\alpha + g^2 t^2) \geq 0,$$

což je nerovnice, kterou jsme výše získali užitím skalárního součinu. Další postup řešení by pak již byl stejný jako v předchozím postupu.

3 body

c) Vzhledem k tomu, že se vzdálenost kamene od počátku stále zvětšuje, bude největší v okamžiku dopadu kamene na zem. Tuto vzdálenost můžeme určit dvěma způsoby:

Vypočteme dobu pohybu kamene, tj. $T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ a dosadíme do vztahu pro r, tj.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 t^2 + (v_0 \sin\alpha)^2 t^2 - v_0 g \sin\alpha \cdot t^3 + \frac{g^2}{4} t^4},$$

$$r_{\max} = \sqrt{v_0^2 T^2 - v_0 g \sin\alpha \cdot T^3 + \frac{g^2}{4} T^4} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g},$$

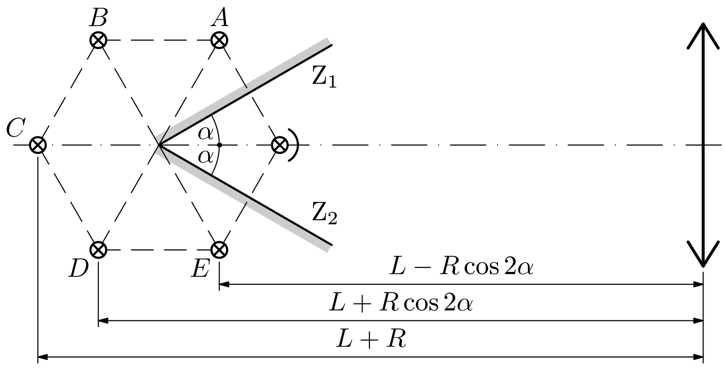
nebo dosadíme do vztahu pro dolet u vrhu šikmo vzhůru, tj.

$$r_{\max} = x_{\max} = v_0 T \cos\alpha = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Po dosazení dostaneme $r_{\max} = 35{,}3$ m.

2 body

2. a) Vznikne pět zdánlivých obrazů světelného zdroje rovnoměrně rozmístěných ve vzdálenosti R od průsečnice rovin zrcadel (obr. R2). (O tom se můžeme snadno přesvědčit, jestliže mezi dvě kapesní zrcátka svírající úhel 60° umístíme malý předmět.) Obraz A vzniká odrazem světla na zrcadle Z_1, obraz E odrazem světla na zrcadle Z_2, obraz B vzniká zobrazením obrazu E zrcadlem Z_1, obraz D vzniká zobrazením obrazu A zrcadlem Z_2, obraz C vzniká zobrazením obrazu B zrcadlem Z_2 a zobrazením obrazu D zrcadlem Z_1.



Obr. R2

3 body

b) Body A a E leží ve vzdálenosti $y = R\sin 2\alpha$ od optické osy. Jejich vzdálenost od čočky $a_1 = L - R\cos 2\alpha = 80$ mm je rovna ohniskové vzdálenosti čočky. Obrazy vytvořené čočkou tedy budou ležet v nekonečnu ve směrech, které jsou od optické osy odchýleny o úhel $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{R\sin 2\alpha}{f} \doteq 12{,}5°$. **2 body**

Body B a D leží také ve vzdálenosti $y = R\sin 2\alpha$ od optické osy a ve vzdálenosti $a_2 = L + R\cos 2\alpha = 100$ mm $> f$ od čočky. Čočka tedy vytvoří jejich skutečné obrazy. Ze zobrazovací rovnice čočky a vztahu pro výpočet příčného zvětšení

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \qquad Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f}$$

plyne

$$a_2' = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = \frac{(L + R\cos 2\alpha)f}{L + R\cos 2\alpha - f} = 400 \text{ mm},$$

$$y_2' = -\frac{fy}{a_2 - f} = -\frac{fR\sin 2\alpha}{L + R\cos 2\alpha - f} = -69 \text{ mm}.$$

Obrazy bodů B a D budou ve vzdálenosti 400 mm od čočky a ve vzdálenosti 69 mm od optické osy v opačné polorovině. **3 body**

Bod C leží na optické ose ve vzdálenosti $a_3 = L{+}R = 110$ mm od čočky. Jeho skutečný obraz vytvořený čočkou bude ležet na optické ose ve vzdálenosti

$$a_3' = \frac{a_3 f}{a_3 - f} = \frac{(L+R)f}{L+R-f} = 293\ \mathrm{mm}.$$

2 body

3. a) Platí

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R}, \qquad U_2 = U\frac{R_2}{R_2 + R}, \tag{1}$$

$$U_2 - U_1 = U\left(\frac{R_2}{R_2 + R} - \frac{R_1}{R_1 + R}\right) = U\frac{R_1R_2 + R_2R - R_1R_2 - R_1R}{(R_1 + R)(R_2 + R)} =$$
$$= U\frac{R(R_2 - R_1)}{(R_1 + R)(R_2 + R)}.$$

2 body

Odpor R, při kterém je hodnota získaného výrazu maximální, určíme užitím první derivace. Podmínka

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta U)}{\mathrm{d}R} = U(R_2 - R_1)\frac{(R_1 + R)(R_2 + R) - R(R_1 + R_2 + 2R)}{((R_1 + R)(R_2 + R))^2} =$$
$$= U(R_2 - R_1)\frac{R_1R_2 - R^2}{((R_1 + R)(R_2 + R))^2} = 0$$

je splněna pro

$$R = \sqrt{R_1R_2} = \sqrt{R_1 \cdot nR_1} = R_1\sqrt{n}. \tag{2}$$

Pro $R < \sqrt{R_1R_2}$ je první derivace kladná, pro $R > \sqrt{R_1R_2}$ je záporná. Jedná se tedy o maximum.

3 body

b) Dosazením z (2) do (1) dostaneme

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_1\sqrt{n}} = U\frac{1}{1 + \sqrt{n}}, \quad U_2 = U\frac{nR_1}{nR_1 + R_1\sqrt{n}} = U\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1}.$$

2 body

c) Platí

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U^2R_1}{(R_1 + R)^2}, \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{U^2R_2}{(R_2 + R)^2},$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2(R_1 + R)^2}{R_1(R_2 + R)^2} = \frac{nR_1^2(1 + \sqrt{n})^2}{R_1^2(n + \sqrt{n})^2} = \frac{nR_1^2(1 + \sqrt{n})^2}{R_1^2(\sqrt{n})^2(\sqrt{n} + 1)^2} = 1.$$

Výkon termistoru je v obou krajních případech stejný.

2 body

Pro dané $n = 9$ je a) $R = 3R_1$, b) $U_1 = \frac{U}{4}$, $U_2 = \frac{3U}{4}$.

1 bod

4. a) Protože výsledný moment sil působících na rozbíhající se setrvačník je konstantní, byl otáčivý pohyb setrvačníku rovnoměrně zrychlený s úhlovým zrychlením ε_1. Do okamžiku, kdy se závaží dotklo podlahy, proběhl setrvačník úhlovou dráhu

$$\varphi_1 = \frac{h}{r} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{2h}{rt_1^2}.$$

V čase t_1 se setrvačník otáčel úhlovou rychlostí $\omega_1 = \varepsilon_1 t_1 = \dfrac{2h}{rt_1}$.

Číselně vychází $\omega_1 = 24\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

2 body

b,c) Po dopadu závaží na podlahu koná setrvačník rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb s úhlovým zrychlením ε_2 až do zastavení. Platí

$$\omega_1 = \varepsilon_2 t_2 = \varepsilon_1 t_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{t_1}{t_2} = \frac{2h}{rt_1t_2}.$$

Pro zrychlený pohyb závaží a setrvačníku při rozbíhání a pro zpomalený pohyb setrvačníku při zastavování platí pohybové rovnice

$$ma = m\varepsilon_1 r = m\frac{2h}{t_1^2} = mg - T,$$
$$J\varepsilon_1 = Tr - M,$$
$$J\varepsilon_2 = M,$$

kde T je velikost síly, kterou je napnuto vlákno.

5 bodů

Řešením soustavy dostaneme

$$T = m\left(g - \frac{2h}{t_1^2}\right), \qquad J(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = Tr,$$

$$J = \frac{Tr}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{m\left(g - \frac{2h}{t_1^2}\right)r}{\frac{2h}{r}\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_1t_2}\right)} = \frac{mr^2}{2h}\cdot\frac{g - \frac{2h}{t_1^2}}{\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_1t_2}},$$

$$M = J\varepsilon_2 = \frac{mr^2}{2h}\cdot\frac{g - \frac{2h}{t_1^2}}{\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_1t_2}}\cdot\frac{2h}{rt_1t_2} = \frac{mr\left(g - \frac{2h}{t_1^2}\right)}{\frac{t_2}{t_1} + 1}.$$

Číselně vychází $J = 0{,}027\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, $M = 4{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m}$.

3 body