Řešení úloh 1. kola 53. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 4, 7), M. Jarešová (3), I. Čáp SK (2), J. Jírů (5)
P. Šedivý (6)

1. a) Objem V_1 ponořené části válečku je 63 % objemu V celého válečku. Podle Archimedova zákona platí:

$$V\varrho = V_1\varrho_1 \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{V_1\varrho_1}{V} = 0{,}63\varrho_1 \doteq 8\,600\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

2 body

Hladina rozděluje průřez válečku na dvě kruhové úseče (obr. R1). Obsah S_2 úseče nad hladinou je

$$S_2 = \frac{1}{2}r^2[2\alpha - \sin(2\alpha)] = 0{,}37\pi r^2,$$

kde 2α je středový úhel v radiánech. Rovnici upravíme na tvar

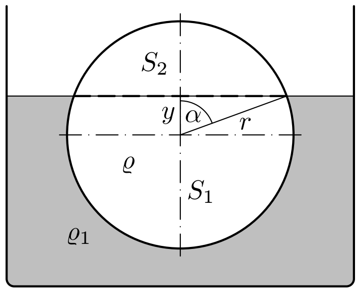
$$F(\alpha) = 2\alpha - \sin(2\alpha) - 0{,}74\pi = 0$$

a vyřešíme numericky v EXCELU. Z tabulky 1 vyplývá

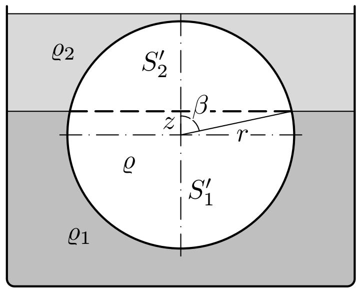
$$\alpha = 78{,}1^\circ, \qquad y = r\cos\alpha = 0{,}21r.$$

Váleček tedy vyčnívá ze rtuti do výšky 0,79 poloměru.

4 body



Obr R1



Obr. R2

b) Po nalití vody (obr. R2) platí

$$V_2\varrho_2 + (V - V_2)\varrho_1 = V\varrho \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1 - \varrho_2}V = 0{,}399\,37V,$$

takže

$$S_2' = \frac{1}{2}r^2[2\beta - \sin(2\beta)] = 0{,}399\,37\pi r^2.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$F(\beta) = 2\beta - \sin(2\beta) - 0{,}798\,7\pi = 0$$

a vyřešíme numericky v EXCELU. Z tabulky 2 vyplývá

$$\beta = 80{,}9^\circ, \qquad z = r\cos\beta = 0{,}16r.$$

Váleček tedy vyčnívá ze rtuti do výšky 0,84 poloměru.

4 body

α ve stupních	α v radiánech	F(α)
77,0	1,34390	-0,07534
78,0	1,36136	-0,00880
78,1	1,36310	-0,00212
78,2	1,36485	0,00457
78,3	1,36659	0,01126
78,4	1,36834	0,01796
78,5	1,37008	0,02466
78,6	1,37183	0,03136
78,7	1,37357	0,03807
78,8	1,37532	0,04479
78,9	1,37706	0,05151
79,0	1,37881	0,05824

tab. 1

β ve stupních	β v radiánech	F(β)
80,0	1,39626	-0,05868
80,1	1,39801	-0,05191
80,2	1,39975	-0,04513
80,3	1,40150	-0,03835
80,4	1,40324	-0,03157
80,5	1,40499	-0,02478
80,6	1,40674	-0,01798
80,7	1,40848	-0,01119
80,8	1,41023	-0,00439
80,9	1,41197	0,00242
81,0	1,41372	0,00923
81,1	1,41546	0,01604

tab. 2

2. a) Při pohybu po kruhové trajektorii je gravitační síla silou dostředivou. Platí

$$\varkappa\frac{Mm}{(R+h_1)^2} = \frac{mv_0^2}{R+h_1} = \frac{m4\pi^2(R+h_1)}{T_0^2}.$$

Z toho

$$v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R+h_1}} \approx 7{,}75\ \mathrm{km\cdot s^{-1}},$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h_1)^3}{\varkappa M}} \approx 5\,410\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 30\ \mathrm{min}\ 10\ \mathrm{s}.$$

2 body

b) Po snížení rychlosti přejde družice na eliptickou dráhu. V nejnižším bodě s výškou h_2 má rychlost v_2. Ze zákona zachování momentu hybnosti (Keplerův zákon o konstantní plošné rychlosti) dostaneme

$$v_1(R+h_1) = v_2(R+h_2).$$

Zákon zachování mechanické energie vyjadřuje rovnice

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \varkappa\frac{Mm}{R+h_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \varkappa\frac{Mm}{R+h_2}.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme hledanou rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\varkappa M(R+h_2)}{(R+h_1)(2R+h_1+h_2)}} \approx 7{,}73\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Rychlost družice je nutno zmenšit přibližně o 15 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4 body

c) Pro oběžné doby platí třetí Keplerův zákon $(a_1/a_2)^3 = (T_1/T_2)^2$, kde a_1, a_2 jsou délky hlavních poloos trajektorií. V našem případě $a_1 = R + h_1$, $a_2 = (2R+h_1+h_2)/2$, $T_1 = T_0$, $T_2 = T$.

$$T = T_0\left(\frac{2R+h_1+h_2}{2(R+h_1)}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(2R+h_1+h_2)^3}{8\varkappa M}} \approx 5\,380\ \mathrm{s}.$$

Doba oběhu se zmenší přibližně o 30 s.

4 body

Jiné řešení úlohy b)

Plošná rychlost družice na eliptické trajektorii je

$$w = \frac{v_1(R+h_1)}{2} = \frac{S}{T},$$

kde S je plošný obsah trajektorie, která má ohnisko ve středu Země, hlavní poloosu $a_2 = (2R+h_1+h_2)/2$ a excentricitu $e_2 = (h_1-h_2)/2$. Vedlejší poloosa má velikost

$$b_2 = \sqrt{a_2^2 - e_2^2} = \sqrt{\left(\frac{2R+h_1+h_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_1-h_2}{2}\right)^2} = \\ = \sqrt{(R+h_1)(R+h_2)}.$$

Pak

$$v_1 = \frac{2w}{R+h_1} = \frac{2S}{T(R+h_1)} = \frac{2\pi a_2 b_2}{T(R+h_1)} = \\ = \frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}(2R+h_1+h_2)\cdot\sqrt{(R+h_1)(R+h_2)}}{2\pi\sqrt{\frac{(2R+h_1+h_2)^3}{8\varkappa M}}\cdot(R+h_1)} = \sqrt{\frac{2\varkappa M(R+h_2)}{(2R+h_1+h_2)(R+h_1)}}.$$

3. a) Po vložení ledu o hmotnosti m a teplotě t_{L} do kalorimetru, ve kterém je voda o hmotnosti M a teplotě t_{v}, může pro výsledný rovnovážný stav obecně nastat jedna ze sedmi možností:

A. Bude-li

$$c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})+ml_{\mathrm{t}}<c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}}),$$

pak všechen led roztaje a soustava bude mít po dosažení rovnovážného stavu teplotu větší než $t_{\mathrm{t}}=0\ {}^{\circ}\mathrm{C}$.

B. Bude-li

$$c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})+ml_{\mathrm{t}}=c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}}),$$

pak všechen led roztaje a soustava bude mít teplotu t_{t}.

C. Bude-li

$$c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})<c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}})<c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})+ml_{\mathrm{t}},$$

pak část ledu roztaje a soustava bude mít teplotu t_{t}.

D. Bude-li

$$c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})=c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}}),$$

pak žádný led neroztaje a soustava bude mít teplotu t_{t}.

E. Bude-li

$$c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}})+Ml_{t}>c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})>c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}}),$$

potom část vody zmrzne a soustava bude mít teplotu $t_{\mathrm{t}}=0\ {}^{\circ}\mathrm{C}$.

F. Bude-li

$$c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}})+Ml_{t}=c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}}),$$

potom všechna voda zmrzne a soustava bude mít teplotu t_{t}.

G. Bude-li

$$c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}})+Ml_{t}<c_{\mathrm{L}}m(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}}),$$

potom všechna voda zmrzne a soustava bude mít teplotu menší než t_{t}.

2 body

b) V prvním kalorimetru nastane situace D. Platí kalorimetrická rovnice

$$c_{\mathrm{L}}m_1(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})=c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}}). \tag{1}$$

V druhém kalorimetru nastane situace C. Platí kalorimetrická rovnice

$$c_{\mathrm{L}}m_2(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})+(m_2-m_2')l_{\mathrm{t}}=c_{\mathrm{v}}M(t_{\mathrm{v}}-t_{\mathrm{t}}). \tag{2}$$

Použitím (1) a (2) dostaneme

$$c_{\mathrm{L}}m_2(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}})+(m_2-m_2')l_{\mathrm{t}}=c_{\mathrm{L}}m_1(t_{\mathrm{t}}-t_{\mathrm{L}}),$$

z čehož
$$t_\mathrm{L} = t_\mathrm{t} - \frac{(m_2 - m_2')l_\mathrm{t}}{c_\mathrm{L}(m_1 - m_2)} = t_\mathrm{t} - \frac{0{,}1l_\mathrm{t}}{c_\mathrm{L}} = -16\ {}^\circ\mathrm{C}, \qquad (3)$$
potom
$$t_\mathrm{v} = t_\mathrm{t} + \frac{c_\mathrm{L}m_1}{c_\mathrm{v}M}(t_\mathrm{t} - t_\mathrm{L}) = t_\mathrm{t} + \frac{m_1(m_2 - m_2')l_\mathrm{t}}{c_\mathrm{v}M(m_1 - m_2)} = t_\mathrm{t} + \frac{0{,}1l_\mathrm{t}}{c_\mathrm{v}} = 8\ {}^\circ\mathrm{C}. \qquad (4)$$

4 body

c) Protože $m_3 > m_1$, může ve třetím kalorimetru nastat situace E, F nebo G. Otestujme nejprve situaci F. Dosazením zjistíme, že výraz na levé straně rovnice je větší než výraz na pravé straně. Z toho plyne, že nastane situace E. V ní platí kalorimetrická rovnice
$$m_3c_\mathrm{L}(t_\mathrm{t} - t_\mathrm{L}) = m_1c_\mathrm{v}(t_\mathrm{v} - t_\mathrm{t}) + M'l_\mathrm{t},$$
kde M' je hmotnost zmrzlé vody. Pak
$$M' = \frac{m_3c_\mathrm{L}(t_\mathrm{t} - t_\mathrm{L})}{l_\mathrm{t}} - \frac{m_1c_\mathrm{v}(t_\mathrm{v} - t_\mathrm{t})}{l_\mathrm{t}}.$$
Dosazením za $(t_\mathrm{t} - t_\mathrm{L})$ a $(t_\mathrm{v} - t_\mathrm{t})$ z rovnic (3) a (4) dostaneme
$$M' = \frac{m_3c_\mathrm{L}}{l_\mathrm{t}} \cdot \frac{(m_2 - m_2')l_\mathrm{t}}{c_\mathrm{L}(m_1 - m_2)} - \frac{m_1c_\mathrm{v}}{l_\mathrm{t}} \cdot \frac{m_1(m_2 - m_2')l_\mathrm{t}}{c_\mathrm{v}M(m_1 - m_2)} =$$
$$= \left(m_3 - \frac{m_1^2}{M}\right)\frac{m_2 - m_2'}{m_1 - m_2} = 0{,}1M.$$
Ve 3. kalorimetru zmrzne voda o hmotnosti $0{,}1M$. Tím se hmotnost ledu ve 3. kalorimetru zvětší na $m_3' = 2{,}1M$. Výsledná teplota bude t_t.

4 body

4. a) Jestliže v sériovém zapojení nabitých kondenzátorů změníme vzdálenost desek jednoho kondenzátoru na trojnásobek, zmenší se jeho kapacita na třetinu, náboj na něm se ale nezmění. Jeho napětí se tedy 3krát zvětší. Intenzita el. pole mezi deskami kondenzátoru na počátku byla $E_1 = \dfrac{\frac{U_\mathrm{e}}{2}}{d}$, po změně vzdálenosti mezi deskami je $E_2 = \dfrac{3\frac{U_\mathrm{e}}{2}}{3d} = E_1$. Intenzita elektrického pole mezi deskami se nezmění.

Práce W, kterou musíme vykonat, bude rovna zvýšení energie elektrického pole soustavy kondenzátorů. Původní celková kapacita soustavy $\dfrac{C}{2}$ se změnila posunutím desek na $\frac{C}{4}$, náboj na deskách $Q = \frac{CU_e}{2}$ se nezměnil:

$$W = \Delta E_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\frac{C}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\frac{C}{2}} = \frac{Q^2}{C} = \frac{CU_e^2}{4} = 2{,}5\ \text{mJ}.$$

2,5 bodu

b) Budou-li kondenzátory spojeny paralelně, posunutím desek se celková kapacita změní z $2C$ na $\frac{4}{3}C$, napětí na kondenzátorech je teď U'. Celkový náboj se nezmění:

$$Q = 2CU_e = \frac{4}{3}CU' \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{3}{2}U_e.$$

Poměr intenzit elektrického pole uvnitř kondenzátoru před a po posunutí jeho desek

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{U_e}{d}}{\frac{U'}{3d}} = 2.$$

Práce W, kterou musíme vykonat bude opět rovna zvýšení energie elektrického pole kondenzátorů:

$$W = \Delta E_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\frac{4C}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{2C} = \frac{3}{2}CU_e^2 - CU_e^2 = \frac{CU_e^2}{2} = 5\ \text{mJ}.$$

2,5 bodu

ca) Při posunutí desek se kapacita soustavy změní z $\frac{C}{2}$ na $\frac{C}{4}$ a celková energie el. pole se změní o $\Delta E_e = E_{e2} - E_{e1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{4}U_e^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{2}U_e^2 = -\frac{1}{8}CU_e^2$.

Při posunutí desek projde obvodem náboj $\Delta q = (C_2 - C_1)U_e = -\frac{C}{4}U_e$.

Zdroj vykoná práci $W_z = \Delta q \cdot U_e = -\frac{C}{4}U_e^2$.

Podle zákona zachování energie je součet práce, kterou vykonáme při posunutí desek, a práce, kterou vykoná zdroj, roven zvýšení energie elektrického pole soustavy: $W + W_z = \Delta E_e$. Při posunutí desek musíme vykonat práci

$$W = \Delta E_e - W_z = -\frac{C}{8}U_e^2 + \frac{C}{4}U_e^2 = \frac{C}{8}U_e^2 = 1{,}25\ \text{mJ}.$$

Tedy celkově zdroj přijal energii 2,5 mJ, z toho energii 1,25 mJ poskytla soustava kondenzátorů a zbytek 1,25 mJ je hledaná práce vnější síly.

Při posunutí desek se změní napětí na kondenzátoru z $\frac{U_e}{2}$ na $\frac{3}{4}U_e$. Poměr intenzit elektrického pole uvnitř kondenzátoru před a po posunutí jeho desek

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\dfrac{U_\mathrm{e}}{2d}}{\dfrac{3U_\mathrm{e}}{12d}} = 2.$$

2,5 bodu

cb) Napětí na deskách kondenzátorů zůstává U_e. Při posunutí desek se změní kapacita soustavy z $2C$ na $\frac{4}{3}C$ a energie el. pole se změní o

$$\Delta E_\mathrm{e} = E_\mathrm{e2} - E_\mathrm{e1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4C}{3} U_\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} \cdot 2CU_\mathrm{e}^2 = -\frac{1}{3} CU_\mathrm{e}^2.$$

Při posunutí desek projde obvodem náboj $\Delta q = (C_2 - C_1)U_\mathrm{e} = -\dfrac{2C}{3} U_\mathrm{e}$.

Zdroj vykoná práci $W_\mathrm{z} = \Delta q \cdot U_\mathrm{e} = -\dfrac{2C}{3} U_\mathrm{e}^2$.

Při posunutí desek musíme vykonat práci

$$W = \Delta E_\mathrm{e} - W_\mathrm{z} = -\frac{C}{3} U_\mathrm{e}^2 + \frac{2C}{3} U_\mathrm{e}^2 = \frac{C}{3} U_\mathrm{e}^2 = 3{,}33\ \mathrm{mJ}.$$

Tedy celkově zdroj přijal energii 6,7 mJ, z toho energii 3,33 mJ poskytla soustava kondenzátorů a zbytek 3,33 mJ je hledaná práce vnější síly. Poměr intenzit elektrického pole uvnitř kondenzátoru před a po posunutí jeho desek

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\dfrac{U_\mathrm{e}}{d}}{\dfrac{U_\mathrm{e}}{3d}} = 3.$$

2,5 bodu

5. a)

$$P_1 = RI_1^2 = R\left(\frac{5U_e}{R + 5R_\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{25RU_e^2}{(R + 5R_\mathrm{i})^2} = 4{,}4\ \mathrm{W},$$

$$\eta_1 = \frac{R}{R + 5R_\mathrm{i}} = 0{,}86.$$

2 body

b)

$$P_2 = RI_2^2 = R\left(\frac{5U_e}{R + 4R_\mathrm{i} + R_\mathrm{i}'}\right)^2 = \frac{25RU_e^2}{(R + 4R_\mathrm{i} + R_\mathrm{i}')^2} = 1{,}9\ \mathrm{W},$$

$$\eta_2 = \frac{R}{R + 4R_\mathrm{i} + R_\mathrm{i}'} = 0{,}56.$$

2 body

c)

$$P_2' = RI_2'^2 = R\left(\frac{4U_e}{R+4R_\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{16RU_e^2}{(R+4R_\mathrm{i})^2} = 3{,}0\ \mathrm{W},$$

$$\eta_2' = \frac{R}{R+4R_\mathrm{i}} = 0{,}88.$$

2 body

d) Hledáme R splňující podmínku $P_2' > P_2$, tj.

$$R\left(\frac{4U_e}{R+4R_\mathrm{i}}\right)^2 > R\left(\frac{5U_e}{R+4R_\mathrm{i}+R_\mathrm{i}'}\right)^2.$$

Výrazy v závorkách i hodnota hledaného odporu jsou kladné, lze tedy psát

$$\frac{4U_e}{R+4R_\mathrm{i}} > \frac{5U_e}{R+4R_\mathrm{i}+R_\mathrm{i}'}.$$

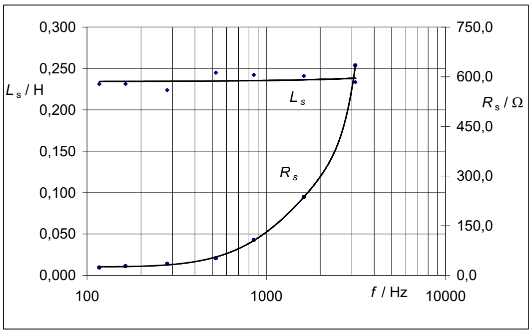
Z nerovnice plyne

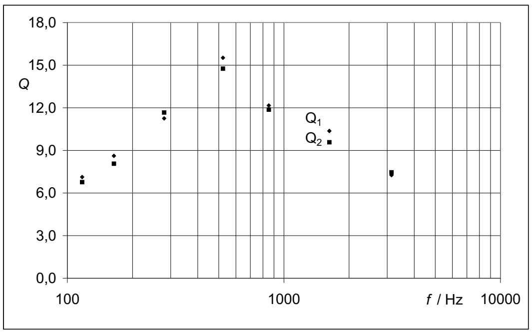
$$R < 4(R_\mathrm{i}' - R_\mathrm{i}) = 15{,}2\ \Omega.$$

4 body

6. Z následující tabulky a grafů je zřejmé, že indukčnost cívky v daném oboru frekvencí je prakticky konstantní, zatímco její rezistance s rostoucí frekvencí čím dál rychleji roste. Činitel jakosti do frekvence 500 Hz roste, při dalším zvětšováním frekvence klesá.

C / nF	8000	4070	1443	378	144	40	11
f / Hz	117	164	280	523	852	1621	3140
U_r / V	1,36	1,55	2,1	2,1	3,2	3,55	2,95
I_r / mA	57	56	60	40,5	30	15	4,65
U_{cr}	9,2	12,5	24,5	31	38	34	22
L_s	0,231	0,231	0,224	0,245	0,242	0,241	0,234
R_s	23,9	27,7	35,0	51,9	106,7	236,7	634,4
Q_1	7,1	8,6	11,3	15,5	12,2	10,4	7,3
Q_2	6,8	8,1	11,7	14,8	11,9	9,6	7,5





7. Přímočarý posuvný pohyb tělesa můžeme popsat jako pohyb hmotného bodu. Počátek vztažné soustavy ztotožníme s počáteční polohou tělesa, kladná poloosa y je orientována svisle dolů. Podle velikosti zrychlení mohou nastat dva případy.

A. Zrychlení podložky $a \geq g$. Pak dojde k oddělení podložky od tělesa okamžitě a těleso začne harmonicky kmitat okolo rovnovážné polohy, kde je tíhová síla v rovnováze se silou elastickou. Hloubka rovnovážné polohy je současně amplitudou výchylky kmitů. Z rovnosti $mg = ky_\mathrm{m}$ plyne

$$y_\mathrm{m} = \frac{mg}{k}.$$

Největší délka, o kterou se pružina prodlouží, je rovna dvojnásobku amplitudy výchylky, tedy $y_0 = \dfrac{2mg}{k}$.

Úhlová frekvence kmitů je $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ a amplituda rychlosti $v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

2 body

B. Zrychlení podložky $a < g$.

a) Výsledná síla, která působí na těleso, je výslednicí síly tíhové, reakce podložky a síly pružnosti pružiny:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_\mathrm{pr}.$$

V okamžiku oddělení tělesa od podložky přestává působit reakce podložky a platí $ma = mg - ky$, kde y je dráha, kterou urazí podložka s tělesem za dobu t. Odtud vyjádříme

$$y = \frac{m(g-a)}{k}. \tag{1}$$

Protože se těleso s podložkou pohybuje rovnoměrně zrychleně, platí současně $y = \frac{1}{2}at^2$. Po dosazení z (1) dostaneme:

$$t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ak}}.$$

2 body

b) K určení maximální délky prodloužení pružiny y_0 použijeme zákon zachování energie. Hladinu nulové potenciální energie tíhové tělesa volíme v místě největší výchylky. Nemůžeme ale využít počáteční polohu tělesa, protože po dobu t na těleso působí ještě reakce podložky, která spotřebovává práci. Proto použijeme polohu, kdy těleso opouští podložku. V tomto okamžiku má těleso jednak kinetickou energii $\frac{1}{2}mv^2$, kde

$$v = at = \sqrt{\frac{2ma(g-a)}{k}}, \qquad (2)$$

jednak potenciální energii tíhovou $mg(y_0 - y)$ a pružina potenciální energii pružnosti $\frac{1}{2}ky^2$. V místě největší výchylky má těleso kinetickou i potenciální energii nulovou a pružina potenciální energii pružnosti $\frac{1}{2}ky_0^2$. Platí tedy

$$\frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(y_0 - y) + \frac{1}{2}ky^2.$$

S použitím vztahů (1) a (2)

$$\frac{1}{2}ky_0^2 =$$

$$= \frac{m^2a(g-a)}{k} + mgy_0 - \frac{m^2g(g-a)}{k} + \frac{m^2(g-a)^2}{2k},$$

tedy

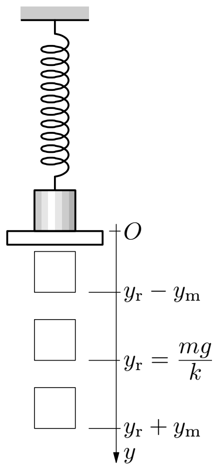
$$\frac{1}{2}ky_0^2 - mgy_0 + \frac{m^2(g-a)^2}{2k} = 0.$$

Kvadratická rovnice má dva kořeny

$$y_0 = \frac{mg}{k} \pm \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)}.$$

Maximální prodloužení pružiny má tedy hodnotu

$$y_0 = \frac{mg}{k} + \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)}. \qquad (3)$$



Obr. R3

4 body

c) Druhý kořen kvadratické rovnice má význam horní polohy kmitajícího tělesa (obr. R3). Amplituda vzniklých kmitů je tedy

$$y_{\mathrm{m}} = \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)}. \tag{4}$$

Rovnovážná poloha je ve vzdálenosti $y_{\mathrm{r}} = \dfrac{mg}{k}$ od počáteční polohy tělesa.

1 bod

d) Největší rychlost bude mít těleso při průchodu rovnovážnou polohou

$$v_{\mathrm{m}} = \omega y_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot y_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{m}{k}a(2g-a)}. \tag{5}$$

1 bod

Pro $a = g$ přechází vztahy (3), (4) a (5) ve vztahy z 1. části úlohy.