Řešení úloh celostátního kola 54. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: J. Jírů (1), J. Thomas (2), P. Šedivý (3) a M. Kapoun (4)

1. Označme $t_1 = 7$ s, $t_2 = 12$ s, $t_3 = 20$ s, $F_\mathrm{m} = 12\,000$ N.

a) Velikost hybnosti vagónu je určena obsahem plochy pod grafem síly. V časovém intervalu $\langle 0, t_1\rangle$ je to

$$p_1 = \frac{F_\mathrm{m} t_1}{2} = 42 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}},$$

v časovém intervalu $\langle 0, t_2\rangle$ je to

$$p_\mathrm{m} = \frac{F_\mathrm{m} t_1}{2} + F_\mathrm{m}(t_2 - t_1) = 102 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}.$$

V časovém intervalu $\langle t_2, t_3\rangle$ se už hybnost vagónu nemění. Vagón bude mít v čase t_1 rychlost $v_1 = \dfrac{p_1}{m} = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, v časovém intervalu $\langle t_2, t_3\rangle$ rychlost $v_\mathrm{m} = \dfrac{p_\mathrm{m}}{m} = 5{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

b) Z předchozího výpočtu plyne, že hledaný čas je z intervalu $\langle 0, t_1\rangle$. Na tomto časovém intervalu platí

$$mv' = \frac{1}{2}F't', \qquad \frac{F'}{t'} = \frac{F_\mathrm{m}}{t_1}.$$

Z rovnic plyne

$$t' = \sqrt{\frac{2mv't_1}{F_\mathrm{m}}} = 5{,}9\ \mathrm{s}. \tag{1}$$

2 body

c) Na prvním úseku pohybu je velikost síly přímo úměrná času:

$$F(t) = \frac{F_\mathrm{m}}{t_1} t.$$

Závislost rychlosti na čase získáme integrací

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{F(t)}{m}\,\mathrm{d}t = \int \frac{F_\mathrm{m}}{mt_1} \cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{F_\mathrm{m}}{2mt_1} \cdot t^2, \tag{2}$$

přičemž v nulovém čase je počáteční rychlost nulová.
Dráha na prvním úseku je určena integrálem

$$s = \int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F_\mathrm{m}}{6mt_1} \cdot t^3\right]_0^{t_1} = \frac{F_\mathrm{m}}{6mt_1} \cdot t_1^3 = \frac{F_\mathrm{m} t_1^2}{6m} = 4{,}9\ \mathrm{m}.$$

3 body

Na druhém úseku se vozík pohybuje vlivem konstantní síly rovnoměrně zrychleným pohybem s počáteční rychlostí v_1 a konečnou rychlostí v_m. Dráha na druhém úseku je

$$s_2 = \frac{v_1 + v_\mathrm{m}}{2}(t_2 - t_1) = 18\ \mathrm{m}.$$

2 body

Na třetím úseku se vagón pohybuje rovnoměrně se stálou rychlostí v_m, přičemž urazí dráhu

$$s_3 = v_\mathrm{m}(t_3 - t_2) = 40{,}8\ \mathrm{m}.$$

Celková dráha je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \doteq 64\ \mathrm{m}.$$

1 bod

Poznámka: Vztah (1) lze také přímo odvodit z (2).

2. a) V neinerciální vztažné soustavě otáčející se spolu s kuličkou působí na kuličku tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, tahová síla závěsu $\boldsymbol{T}$, setrvačná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ a elektrická síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$, které jsou v rovnováze (obr. R1). Ve vodorovném směru platí

$$T\sin\alpha = m\omega^2 r + F_\mathrm{e}\sin\alpha, \qquad (1)$$

ve svislém směru platí

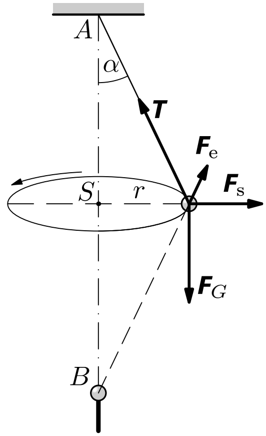
$$T\cos\alpha + F_\mathrm{e}\cos\alpha = mg. \qquad (2)$$

Z (1) vyjádříme

$$T = F_\mathrm{e} + \frac{m\omega^2 r}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

dosadíme do (2) a upravíme:

$$F_\mathrm{e} = \frac{mg}{2\cos\alpha} - \frac{m\omega^2 r}{2\sin\alpha}. \qquad (4)$$



Obr. R1

Po dosazení $F_\mathrm{e} = \dfrac{kQ^2}{\left(\dfrac{r}{\sin\alpha}\right)^2}$ a úpravě dostaneme

$$|Q| = \frac{r}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{m}{2k}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin\alpha}\right)}.$$

Aby úloha měla řešení, musí být splněna podmínka $\dfrac{g}{\cos\alpha} - \dfrac{\omega^2 r}{\sin\alpha} > 0$, která v našem případě splněna je.
Číselně: $|Q| = 8{,}6\cdot 10^{-8}$ C.

5 bodů

b) Dosazením z (4) do (3) a úpravou dostaneme

$$T = \frac{mg}{2\cos\alpha} - \frac{m\omega^2 r}{2\sin\alpha} + \frac{m\omega^2 r}{\sin\alpha} = \frac{mg}{2\cos\alpha} + \frac{m\omega^2 r}{2\sin\alpha}.$$

Číselně: $T = 0{,}107$ N.

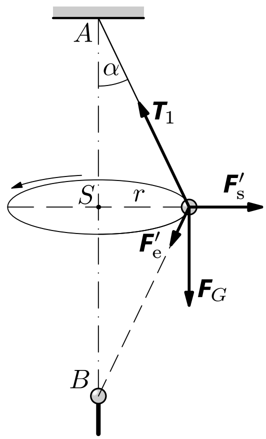
1 bod

c) Elektrická síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}'$ má teď opačný směr (obr. R2) a vztahy (1), (2) a (3) se změní na:

$$T_1 \sin\alpha = m\omega_1^2 r - F_\mathrm{e}' \sin\alpha, \tag{5}$$

$$T_1 \cos\alpha - F_\mathrm{e}' \cos\alpha = mg, \tag{6}$$

$$T_1 = -F_\mathrm{e}' + \frac{m\omega_1^2 r}{\sin\alpha}, \tag{7}$$



Obr. R2

Dosazením ze (7) do (6) a úpravou dostaneme

$$\frac{m\omega_1^2 r \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2F_\mathrm{e}' \cos\alpha + mg,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2F_\mathrm{e}' \sin\alpha}{mr} + \frac{g \operatorname{tg}\alpha}{r}} = \sqrt{\frac{2kQ_1^2 \sin^3\alpha}{mr^3} + \frac{g \operatorname{tg}\alpha}{r}}.$$

Číselně: $\omega_1 = 11{,}5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
Ze vztahu (6) vyjádříme

$$T_1 = F_\mathrm{e}' + \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{kQ_1^2 \sin^2\alpha}{r^2} + \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Číselně: $T_1 = 0{,}122$ N.

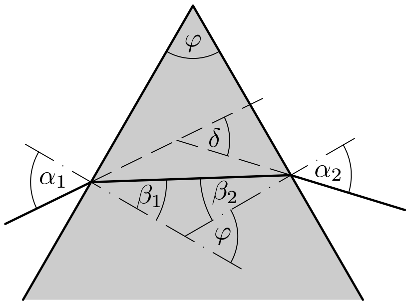
4 body

3. a) Průchod paprsku hranolem s lámavým úhlem φ je znázorněn na obr. R3. Procházející paprsek se odchýlí od původního směru o úhel

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi,$$

přičemž

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = n.$$



Obr. R3

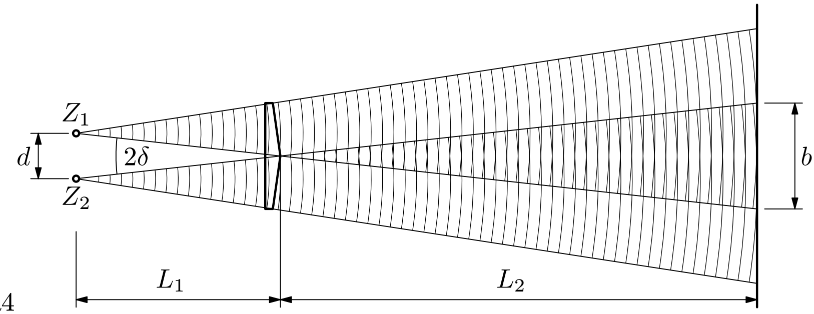
Je-li lámavý úhel φ malý a paprsek prochází hranolem přibližně kolmo, můžeme psát

$$\alpha_1 \approx n\beta_1, \quad \alpha_2 \approx n\beta_2, \quad \delta \approx (n-1)\varphi.$$

Paprsky procházející těsně nad středem hranolu se odchýlí o úhel δ dolů a paprsky procházející těsně pod středem se odchýlí o stejný úhel nahoru (obr. R4). Na stínítku obě světelná vlnění interferují v pruhu šířky

$$b = 2L_2 \operatorname{tg}\delta \approx 2L_2\delta \approx 2L_2 \operatorname{tg}[(n-1)\varphi] = 6{,}0 \text{ cm}.$$

5 bodů



Obr. R4

b) Světelná vlnění vycházející z dvojhranolu se chovají, jako by vycházela ze dvou samostatných štěrbinových zdrojů Z_1, Z_2 nacházejících se ve vzdálenosti $l = L_1 + L_2$ od stínítka a ve vzájemné vzdálenosti

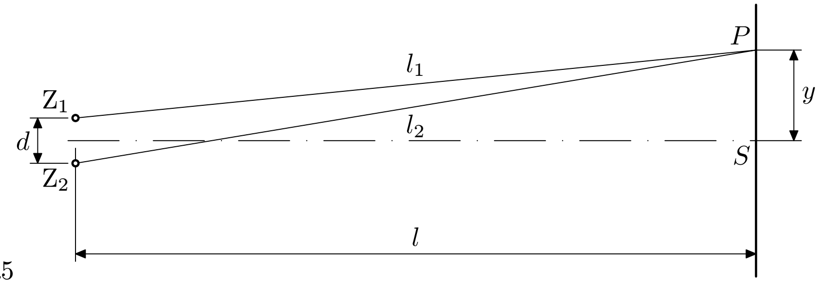
$$d = 2L_1 \operatorname{tg}\delta \approx 2L_1 \operatorname{tg}[(n-1)\varphi].$$

Ve středu S stínítka se setkávají s nulovým dráhovým rozdílem (obr. R5). V bodě P ve vzdálenosti y od středu stínítka je dráhový rozdíl $\Delta l = l_2 - l_1$. Platí

$$l_2^2 - l_1^2 = l^2 + (y + \frac{d}{2})^2 - [l^2 + (y - \frac{d}{2})^2] = 2yd.$$

Protože $y \ll l$, můžeme psát

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) \approx \Delta l \cdot 2l, \qquad \Delta l \approx \frac{yd}{l}.$$



Obr. R5

Interferenční maxima vzniknou v bodech stínítka, kde

$$\Delta l = \frac{dy}{l} = k\lambda \qquad \Rightarrow \qquad y = k\frac{\lambda l}{d}.$$

Šířka interferenčních proužků je rovna vzdálenosti sousedních maxim, tedy

$$\frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(L_1 + L_2)}{2L_1 \operatorname{tg}[(n-1)\varphi]} = 0{,}44\ \mathrm{mm}.$$

5 bodů

4. a) Označíme-li r poloměr kruhové jámy, pak z Bohrovy podmínky

$$r \cdot p_n = \frac{nh}{2\pi}$$

vyjde

$$p_n = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{nh}{6a} \quad \text{odkud} \quad E_n = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{72 m_e a^2} \cdot n^2.$$

Číselně $E_n = n^2 \cdot 3{,}46 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = n^2 \cdot 2{,}16\ \mathrm{eV}$.

3 body

b) Dle principu minima energie obsadí π-elektrony nejnižší hladiny, přičemž dle Pauliho principu budou na každé hladině dva π-elektrony. Pak

$$E(\mathrm{HOMO}) = E_3 = \frac{h^2}{8 m_e a^2} = 19{,}5\ \mathrm{eV},$$ **1 bod**

$$E(\mathrm{LUMO}) = E_4 = \frac{2h^2}{9 m_e a^2} = 34{,}6\ \mathrm{eV},$$ **1 bod**

$$E_{\min} = 2(E_1 + E_2 + E_3) = \frac{7h^2}{18 m_e a^2} = 60{,}6\ \mathrm{eV},$$ **2 body**

c) Energetickému rozdílu $E_4 - E_3$ odpovídá záření o vlnové délce

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_4 - E_3},$$

což po úpravě dá

$$\lambda = \frac{72 m_e c a^2}{7h}.$$

Číselně: $\lambda = 82$ nm. Model tedy předpokládá, že viditelné světlo nepostačuje k excitaci π-elektronů, neboť její molekuly absorbují teprve světlo z ultrafialové oblasti. Benzen by tedy měl být bezbarvý.

3 body

Poznámka: Odhad v modelu FEMO je správný jen kvalitativně. Ve skutečnosti najdeme v absorpčním spektru benzenu maximum již okolo 250 nm.