

Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autoři úloh: J. Jírů (1), J. Thomas (2, 3, 5), M. Jarešová (4, 7), P. Šedivý (6).

- 1.a) Během brzdění roste dráha s časem podle vzorce

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2. \quad (1)$$

Ze vzorce plyne $a = \frac{2(v_0 t - s)}{t^2}$.

Dosazením číselných hodnot $s = 340 \text{ m} - 192 \text{ m} = 148 \text{ m}$, $v_0 = 33,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $t = 5,0 \text{ s}$ dostaneme

$$a = \frac{2(33,6 \cdot 5 - 148)}{5^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

3 body

- b) Rovnici (1) upravíme na tvar kvadratické rovnice

$$\frac{1}{2} a t^2 - v_0 t + s = 0. \quad (2)$$

jejímž řešením jsou kořeny $t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as}}{a}$.

Dosazením číselných hodnot $v_0 = 33,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $s = 340 \text{ m}$ dostaneme

$$t_{1,2} = \frac{33,6 \pm \sqrt{33,6^2 - 2 \cdot 1,6 \cdot 340}}{1,6} \text{ s}.$$

Kvadratická rovnice (2) má dva kořeny $t_1 = 17 \text{ s}$ a $t_2 = 25 \text{ s}$. Rovnice (2) však popisuje pohyb vlaku jen po dobu brzdění, tj. pouze do času $v_0/a = 21 \text{ s}$, tedy na časovém intervalu $\langle 0 \text{ s}, 21 \text{ s} \rangle$. Proto je řešením pouze kořen $t_1 = 17 \text{ s}$.

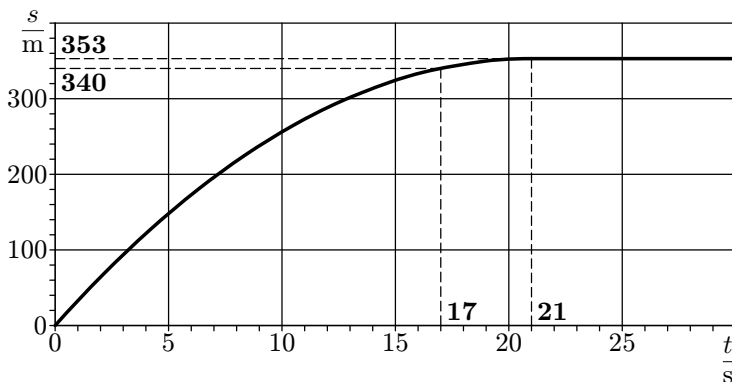
3 body

- c) Dosazením číselných hodnot konstant do rovnice (1) dostaneme funkční závislost

$$\{s\} = 33,6\{t\} - 0,8\{t\}^2,$$

kteřá popisuje pohyb vlaku do okamžiku zastavení, tj. do času $t = 21 \text{ s}$. Po zbývající dobu zůstává dráha konstantní.

4 body



2.a) Z rovnosti tíhové a vztlakové síly plyne

$$V_{\varrho} g = V_1 \varrho_1 g \quad \Rightarrow \quad S_{\varrho} = S_1 \varrho_1,$$

kde S_1 je obsah části průřezu pod hladinou vody (obr. R1). Odtud

$$\varrho = \frac{S_1 \varrho_1}{S}. \quad (1)$$

Pro úhel α platí

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53,13^\circ, \quad 2\alpha = 106,3^\circ, \quad 360^\circ - 2\alpha = 253,7^\circ.$$

$$a = r \sin \alpha = r \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = r \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} r,$$

$$S_1 = \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \pi r^2 + a \cdot r \cos \alpha = \left(\frac{253,7}{360} + \frac{12}{25\pi} \right) \pi r^2 = 0,858 \pi r^2.$$

Dosazením do (1) dostaneme $\varrho = 858 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

5 bodů

b) Nyní platí (obr. R2):

$$V_{\varrho} g = V_1 \varrho_1 g + V_2 \varrho_2 g \quad \Rightarrow \quad S_{\varrho} = S_1 \varrho_1 + S_2 \varrho_2,$$

$$\varrho_2 = \frac{S_{\varrho} - S_1 \varrho_1}{S_2}. \quad (2)$$

Vypočítáme obsah S_1 plochy pod vodou a obsah S_2 plochy ve druhé kapalině: Pro úhel β platí

$$\cos \beta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta = 75,5^\circ, \quad 2\beta = 151^\circ, \quad 360^\circ - 2\beta = 209^\circ.$$

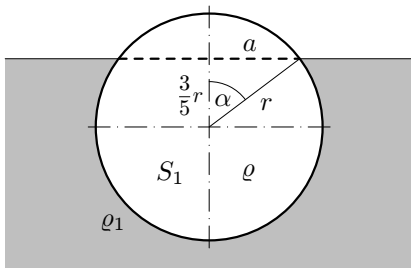
$$b = r\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = r\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = r\sqrt{\frac{15}{16}},$$

$$S_2 = \frac{360^\circ - 2\beta}{360^\circ} \pi r^2 + b \cdot r \cos \beta = \left(\frac{209}{360} + \frac{\sqrt{15}}{16\pi} \right) \pi r^2 = 0,6576 \pi r^2,$$

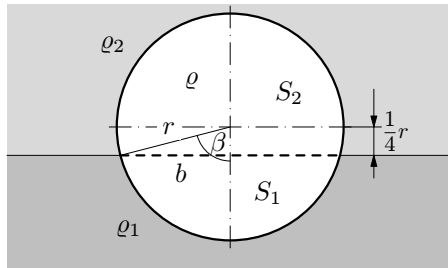
$$S_1 = 0,3424 \pi r^2.$$

Dosazením do (2) dostaneme $\varrho_2 = 784 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

5 bodů



Obr. R1



Obr. R2

- 3.a)** Kladka se zastaví v rovnovážné poloze, kde síly, kterými působí lanko, jsou z obou stran stejně velké a mají stejnou odchylku α od svislého směru (obr. R3). Platí

$$\sin \alpha = \frac{l}{L}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{l^2}{L^2}} = \frac{\sqrt{L^2 - l^2}}{L}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{l}{\sqrt{L^2 - l^2}}.$$

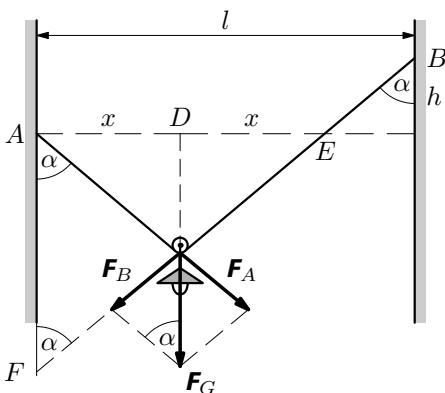
Z trojúhelníku AFE odvodíme

$$2x = l - h \text{tg } \alpha \Rightarrow x = \frac{l - \frac{hl}{\sqrt{L^2 - l^2}}}{2} = 3,8 \text{ m}.$$

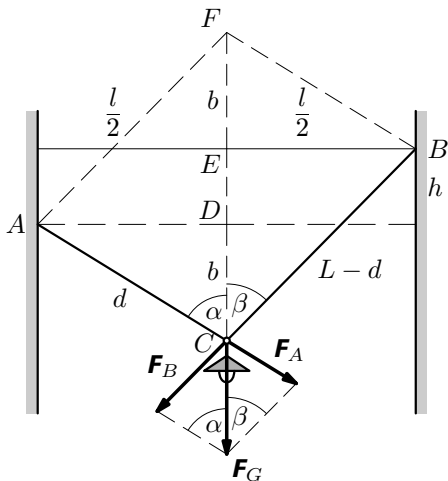
Síly, kterými působí lanko v bodech A a B , mají velikost

$$F_A = F_B = \frac{F_G}{2 \cos \alpha} = \frac{mgL}{2\sqrt{L^2 - l^2}} = 115 \text{ N}.$$

4 body



Obr. R3



Obr. R4

- b) V druhém případě vyjdeme z obr. R4. Užitím Pythagorovy věty dostaneme soustavu rovnic

$$b^2 = d^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2, \quad (h+b)^2 = (L-d)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Odečtením rovnic a úpravou vyjádříme b :

$$2bh + h^2 = L^2 - 2Ld, \quad b = \frac{L^2 - 2Ld - h^2}{2h}.$$

Dosadíme do první rovnice, upravíme a dojdeme ke kvadratické rovnici

$$(4L^2 - 4h^2)d^2 - (4L^3 - 4Lh^2)d + L^4 + h^4 - 2L^2h^2 + l^2h^2 = 0,$$

po dosazení

$$660\{d\}^2 - 8580\{d\} + 27625 = 0.$$

Z kořenů $d_1 = 7,1276$ m, $d_2 = 5,8724$ m vyhovuje úloze pouze druhý kořen $d \doteq 5,87$ m.

3 body

Z podobnosti trojúhelníku BCF s trojúhelníkem, jehož strany tvoří síly F_A , F_B a F_G , plyne

$$\frac{F_A}{F_G} = \frac{d}{2b+h} = \frac{dh}{L^2 - 2Ld}, \quad \frac{F_B}{F_A} = \frac{L-d}{d}.$$

Z toho

$$F_A = \frac{mgdh}{L^2 - 2Ld} = 106 \text{ N}, \quad F_B = \frac{mg(L-d)h}{L^2 - 2Ld} = 129 \text{ N}.$$

Alternativní řešení:

Určíme úhly v rovnoběžníku sil. Z obr. R4 odvodíme

$$\alpha = \arcsin \frac{l}{2d} = 58,37^\circ, \quad \beta = \arcsin \frac{l}{2(L-d)} = 44,55^\circ.$$

Použitím sinové věty pak

$$F_A = \frac{mg \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 106 \text{ N}, \quad F_B = \frac{mg \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = 129 \text{ N}.$$

3 body

4.a) Obecně platí, že celková odporová síla je dána vztahem

$$F = \frac{1}{2} C_{\rho} S v^2 + mg \frac{\xi}{r}$$

a výkon je dán vztahem $P = Fv$. Po dosazení v zimě

$$F_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,35 \cdot 1,22 \cdot 2,4 \cdot 25^2 + 1\,600 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,003}{0,325} \right) \text{ N} = 465 \text{ N}.$$

$$P_1 = 465 \cdot 25 \text{ W} = 11,6 \text{ kW}$$

a v létě

$$F_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,35 \cdot 1,02 \cdot 2,4 \cdot 25^2 + 1\,600 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,0016}{0,325} \right) \text{ N} = 345 \text{ N}.$$

$$P_1 = 345 \cdot 25 \text{ W} = 8,6 \text{ kW}.$$

3 body

b) $150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{150}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určíme výkon motoru při této rychlosti jízdy a porovnáme s údajem udávaným výrobcem. Pro výkon obecně platí:

$$P = \left(\frac{1}{2} C_{\rho} S v^2 + mg \frac{\xi}{r} \right) v.$$

Po dosazení dostaneme v zimě: $P_1 = 43,1 \text{ kW} > 40 \text{ kW}$. Osobní automobil v zimě touto rychlostí jet nemůže, motor nedosáhne potřebného výkonu. V létě pak dostaneme $P_2 = 34,2 \text{ kW} < 40 \text{ kW}$. V létě automobil touto rychlostí jet může.

2 body

- c) Při jízdě automobilu do kopce rovnoměrným pohybem platí pro velikost tahové síly motoru vztah

$$F = \frac{1}{2}C_{\rho}Sv^2 + mg \sin \alpha + mg \cos \alpha \frac{\xi}{r}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\sin \alpha = p$ a $\cos \alpha = \sqrt{1 - p^2}$, můžeme výše uvedený vztah ještě přepsat na tvar

$$F = \frac{1}{2}C_{\rho}Sv^2 + mgp + mg\sqrt{1 - p^2} \cdot \frac{\xi}{r}.$$

Výkon $P = Fv$. Po dosazení zadaných hodnot ($p = 0,04$) dostaneme v zimě $F_1 = 1\,093\text{ N}$, $P_1 = 27,3\text{ kW}$ a v létě $F_2 = 973\text{ N}$, $P_2 = 24,3\text{ kW}$.

2 body

- d) Porovnáním vztahů $F_0 = mg \cdot \frac{\xi}{r}$, $F'_0 = mg \cdot \frac{\xi'}{r}$

dostaneme

$$\xi' = \frac{F'_0}{F_0}\xi = 0,9 \cdot 0,001\,6\text{ m} = 0,001\,4\text{ m}.$$

Celková odporová síla je

$$F'_2 = \frac{1}{2}C_{\rho}Sv^2 + 0,9mg\frac{\xi}{r} = 337\text{ N}.$$

Spotřeba benzínu je přímo úměrná celkové odporové síle. Vzhledem k tomu, že $\frac{F'_2}{F_2} = \frac{337}{345} = 0,98$, můžeme říci, že spotřeba benzínu poklesne o 2 %.

3 body

- 5.a) Vzduch uzavřený nad rtutí v pravém rameni můžeme považovat za ideální plyn. Protože se teplota nemění, jde o děj izotermický, pro který platí Boyleův-Mariottův zákon:

$$p_a \frac{L}{2} S = (p_a + x \varrho_1 g) x S.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici $\varrho_1 g x^2 + p_a x - \frac{p_a L}{2} = 0$.

Úloze vyhovuje kladný kořen $x = \frac{-p_a + \sqrt{p_a^2 + 2L\varrho_1 g p_a}}{2\varrho_1 g} = 8,9\text{ cm}$.

3 body

- b) Při zahřátí se hustota rtuti změní na $\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{1 + \beta \Delta t} = 13\,385\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Množství vzduchu nad rtutí v pravém rameni se nezměnilo, proto platí sta-

vová rovnice ve tvaru

$$\frac{p_a \frac{L}{2} S}{T_1} = \frac{(p_a + y \varrho_2 g) y S}{T_2}.$$

Dostáváme opět kvadratickou rovnici

$$\varrho_2 g y^2 + p_a y - \frac{p_a L T_2}{2 T_1} = 0.$$

Smysl má opět jen kladný kořen

$$y = \frac{-p_a + \sqrt{p_a^2 + \frac{2L\varrho_2 g T_2 p_a}{T_1}}}{2\varrho_2 g} = 10,6 \text{ cm.}$$

3 body

- c) Při teplotě t_1 měla rtuť v trubici objem $V_1 = S(3L - x)$. Ten se při zahřátí na teplotu t_2 zvětší o $\Delta V_1 = V_1 \beta \Delta t = S(3L - x) \beta \Delta t$.

Objem vzduchu se při zahřátí trubice zvětší o $\Delta V_2 = (y - x)S$.

Z trubice tedy vyteče rtuť, která bude mít při teplotě t_2 objem $\Delta V_1 + \Delta V_2$ a hmotnost

$$m = \varrho_2 (\Delta V_1 + \Delta V_2) = \varrho_2 S ((3L - x) \beta \Delta t + y - x) = 15,1 \text{ g.}$$

4 body

- 7.a) Děj $[0] \rightarrow [1]$ je izobarický a tudíž můžeme psát: $p_0 = \text{konst.}$, tj. $p_1 = p_0$.

Na základě zadání je $V_1 = 4V_0$, tedy platí $\frac{V_0}{T_0} = \frac{4V_0}{T_1}$, z čehož $T_1 = 4T_0$.

Děj $[1] \rightarrow [2]$ je izochorický a tedy platí: $V_2 = V_1 = 4V_0$, $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0}{4T_0} = \frac{p_2}{T_2}$,

z čehož $T_2 = \frac{p_2}{p_0} 4T_0$.

Děj $[2] \rightarrow [0]$ je adiabatický, což můžeme vyjádřit pomocí rovnice:

$$p_2 V_2^\gamma = p_0 V_0^\gamma. \text{ Po dosazení } p_2 (4V_0)^\gamma = p_0 V_0^\gamma \text{ můžeme vyjádřit tlak } p_2.$$

$$\text{Dostaneme } p_2 = \frac{1}{4^{1/\gamma}} p_0.$$

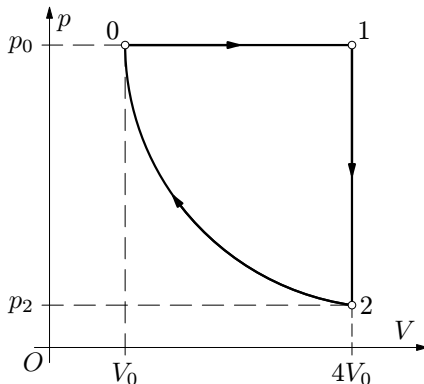
Po dosazení do vztahu pro T_2 dostaneme $T_2 = \frac{p_2}{p_0} 4T_0 = \frac{1}{4^{1/\gamma}} 4T_0 = 4^{1-1/\gamma} T_0$.

Stav 0 charakterizují veličiny p_0 , V_0 , T_0 ; stav 1 je dán veličinami $p_1 = p_0$,

$V_1 = 4V_0$, $T_1 = 4T_0$; stav 2 veličinami $p_2 = \frac{1}{4^{1/\gamma}} p_0$, $V_2 = 4V_0$, $T_2 = 4^{1-1/\gamma} T_0$.

4 body

b) p - V diagram je znázorněn na obr. R5



Obr. R5

3 body

c) Plyn přijímá teplo pouze při izobarickém rozpínání, tj. platí

$$Q = W' + \Delta U = p_0(4V_0 - V_0) + \frac{3}{2}nR(4T_0 - T_0) = 3p_0V_0 + \frac{3}{2} \cdot 3p_0V_0 = 7,5p_0V_0.$$

Práce vykonaná plynem v průběhu cyklu je rovna součtu prací při izobarickém rozpínání a adiabatickém stlačování, tedy

$$W' = 3p_0V_0 - \frac{3}{2}nR(T_0 - 4^{1-\kappa}T_0) = 1,5p_0V_0(1 + 4^{1-\kappa}).$$

Účinnost je dána vztahem

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{1,5p_0V_0(1 + 4^{1-\kappa})}{7,5p_0V_0} = \frac{1 + 4^{1-1,67}}{5} = 0,28 = 28 \, \%.$$

3 body