Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Velikost zrychlení během rozjíždění je $a_1 = \dfrac{v}{t_1} = \dfrac{17{,}5}{40}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}44\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Z rovnic

$$v = at, \qquad s = \frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

vyloučením času dostaneme $a = \dfrac{v^2}{2s}$.

Velikost zrychlení během brzdění je $a_3 = \dfrac{v^2}{2s_3} = \dfrac{17{,}5^2}{2\cdot 280}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}55\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3 body

b) Z rovnic (1) vyloučením velikosti zrychlení dostaneme $s = \dfrac{vt}{2}, \quad t = \dfrac{2s}{v}$.

Dráha na prvním úseku je $s_1 = \dfrac{vt_1}{2} = \dfrac{17{,}5\cdot 40}{2}\ \mathrm{m} = 350\ \mathrm{m}$.

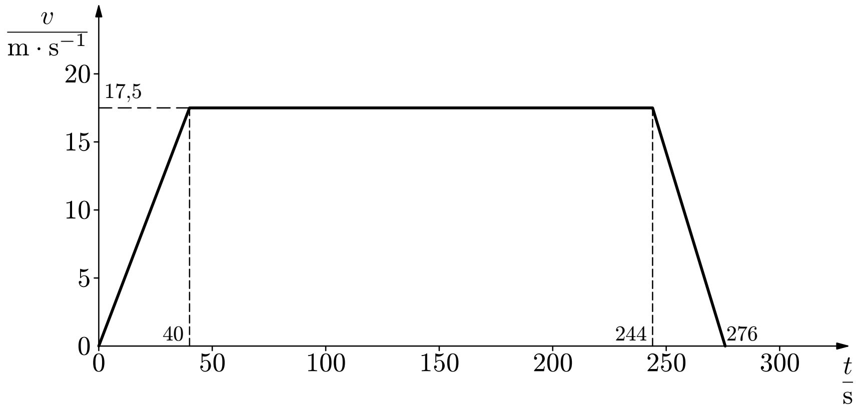
Doba brzdění je $t_3 = \dfrac{2s_3}{v} = \dfrac{2\cdot 280}{17{,}5}\mathrm{s} = 32\ \mathrm{s}$.

3 body

c) K sestrojení grafu je nutné ještě určit dobu jízdy rovnoměrným pohybem

$$t_2 = \frac{s - s_1 - s_3}{v} = \frac{4\,200 - 350 - 280}{17{,}5}\ \mathrm{s} = 204\ \mathrm{s}.$$

(Celkový čas $t = (40 + 204 + 32)\ \mathrm{s} = 276\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{min}\ 36\ \mathrm{s}$.)



3 body

d) Průměrná rychlost je $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{4\,200}{276}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 15{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 55\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

1 bod

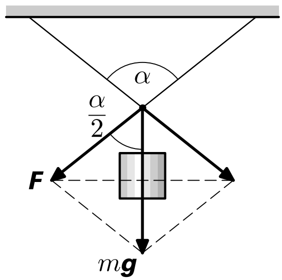
2. a) Tíhu $m\boldsymbol{g}$ tělesa působící v uzlíku rozložíme na síly působící ve směru vláken. Z vlastnosti rovnoběžníku sil, kterým je kosočtverec (obr. R1), dostaneme

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{mg}{2}}{F} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Pro jednotlivé úhly vychází

$\alpha = 20°$, $F = 0{,}51mg = 13{,}4$ N,
$\alpha = 60°$, $F = 0{,}58mg = 15{,}3$ N,
$\alpha = 90°$, $F = 0{,}71mg = 18{,}7$ N,
$\alpha = 135°$, $F = 1{,}31mg = 34{,}6$ N,
$\alpha = 160°$, $F = 2{,}88mg = 76{,}3$ N.

Situace nastane v případě, kdy $F = 1{,}00mg$. Strany rovnoběžníku sil mají stejnou velikost jako je velikost kratší úhlopříčky, což je splněno pro úhel $\alpha = 120°$.



Obr. R1

6 bodů

b) Z rovnoběžníku sil, kterým je obdélník (obr. R2), plyne

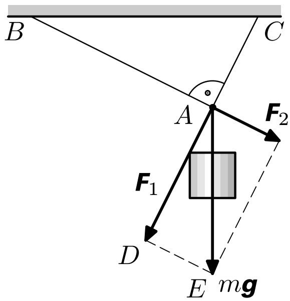
$$(mg)^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

Z podobnosti trojúhelníků BAC a ADE plyne

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{1}.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme

$$F_1 = \frac{2mg}{\sqrt{5}} = 23{,}7 \text{ N}, \quad F_2 = \frac{mg}{\sqrt{5}} = 11{,}8 \text{ N}.$$



Obr. R2

4 body

3. a) Vyjdeme z poznatku, že obsah kruhu roste s druhou mocninou průměru. Z toho plyne, že kruhová podstava válce s dvojnásobným průměrem má čtyřikrát větší obsah, a naopak kruhová podstava s polovičním průměrem má obsah čtyřikrát menší. Při stejné výšce tak má druhý sud čtyřikrát menší objem, tedy $V_2 = V_1/4 = 150$ l. V konečném stavu budou hladiny ve stejné výšce, to znamená, že z většího sudu vyteče pětina objemu a 4 pětiny objemu v něm zůstanou. Přeteče 120 l.

Alternativní řešení:

Pro objem vody před přepuštěním platí $V_1 = \pi\frac{d_1^2}{4}h_0$. Označíme-li h konečnou výšku hladiny v každém sudu, lze objem vody vyjádřit

$$V_1 = \pi\frac{d_1^2}{4}h + \pi\frac{d_2^2}{4}h = \frac{\pi h}{4}\left(d_1^2 + \frac{d_1^2}{4}\right) = \frac{5\pi h d_1^2}{16}.$$

Z rovnosti $\pi\frac{d_1^2}{4}h_0 = \frac{5\pi h d_1^2}{16}$ plyne $h = \frac{4}{5}h_0$, tedy hladina poklesla o jednu pětinu výšky sudu, přetekla pětina objemu vody, tj. 120 l.

3 body

b) Objem spodní části většího sudu pod výtokovým otvorem je $V_1/3 = 200$ l, celý objem menšího sudu je $V_2 = 150$ l. Proto přeteče veškerá voda nad přepouštěcím otvorem, tj. voda o objemu $\frac{2}{3}V_2 = 100$ l.

3 body

c) Těžiště kapalinového tělesa tvaru válce je vždy v polovině výšky tohoto válce. V prvním případě se výška těžiště vody o celkové hmotnosti m_1 během přepouštění zmenší z $\frac{h_0}{2}$ ve velkém sudu na $\frac{4}{5}\cdot\frac{h_0}{2}$ v obou sudech. Úbytek potenciální energie vody je

$$E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = m_1 g\frac{h_0}{2} - m_1 g\frac{4h_0}{10} = \frac{1}{10}m_1 g h_0 = \frac{1}{10}\varrho V_1 g h_0 = \frac{1}{10}\cdot 1\,000\cdot 0{,}6\cdot 9{,}81\cdot 1\ \mathrm{J} = 589\ \mathrm{J}.$$

V druhém případě je počáteční výška těžiště vody o celkové hmotnosti m_2 opět $h_0/2$. V konečném stavu je v menším sudu voda o hmotnosti $m_2/3$ s těžištěm ve výšce $h_0/6$, ve větším sudu je voda o hmotnosti $2m_2/3$ s těžištěm ve výšce $h_0/12$. Úbytek potenciální energie vody je

$$E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = m_2 g\frac{h_0}{2} - \frac{m_2}{3}g\frac{h_0}{6} - \frac{2m_2}{3}g\frac{h_0}{12} = \frac{7}{18}m_2 g h_0 = \frac{7}{18}\varrho V_2 g h_0 = \frac{7}{18}\cdot 1\,000\cdot 0{,}15\cdot 9{,}81\cdot 1\ \mathrm{J} = 572\ \mathrm{J}.$$

4 body

4. Označme $F_1 = 140$ N, $F_2 = 180$ N, $F_3 = 220$ N, $t_1 = 6$ s, $t_2 = 4$ s, $t_3 = 2$ s.
Velikost třecí síly je $F_\mathrm{t} = fmg = 0{,}51 \cdot 35 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 175\ \mathrm{N}$.
Marek bednu neposunul, neboť působil menší silou, než je třecí síla.

1 bod

Během působení Dana se bedna po dobu t_2 pohybovala se zrychlením o velikosti

$$a_2 = \frac{F_2 - F_\mathrm{t}}{m} = \frac{180 - 175}{35}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}143\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

a poté rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti

$$a' = \frac{F_\mathrm{t}}{m} = \frac{175}{35}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Pro maximální velikost rychlosti během pohybu platí $v = a_2 t_2 = a' t_2'$,
z čehož $t_2' = \dfrac{a_2 t_2}{a'}$. Bedna urazila dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + \frac{1}{2} a' t_2'^2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_2^2 t_2^2}{a'} = \left(\frac{0{,}143 \cdot 4^2}{2} + \frac{0{,}143^2 \cdot 4^2}{2 \cdot 5{,}0} \right)\ \mathrm{m} = (1{,}14 + 0{,}03)\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{m}.$$

5 bodů

Během působení Jardy se bedna po dobu t_3 pohybovala se zrychlením o velikosti

$$a_3 = \frac{F_3 - F_\mathrm{t}}{m} = \frac{220 - 175}{35}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1{,}29\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

a poté rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti

$$a' = \frac{F_\mathrm{t}}{m} = \frac{175}{35}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Pro maximální velikost rychlosti během pohybu platí $v = a_3 t_3 = a' t_3'$,
z čehož $t_3' = \dfrac{a_3 t_3}{a'}$. Bedna urazila dráhu

$$s_3 = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 + \frac{1}{2} a' t_3'^2 = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3^2 t_3^2}{a'} = \left(\frac{1{,}29 \cdot 2^2}{2} + \frac{1{,}29^2 \cdot 2^2}{2 \cdot 5{,}0} \right)\ \mathrm{m} = (2{,}57 + 0{,}66)\ \mathrm{m} = 3{,}2\ \mathrm{m}.$$

4 body

5. a) Doba letu míčku z výšky h je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1}$$

Dosazením do rovnice $v_0 = \dfrac{d}{t}$ dostaneme

$$v_0 = d\sqrt{\frac{g}{2h}}. \tag{2}$$

Pro dané výšky vycházejí počáteční rychlosti $v_{01} = 16{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{02} = 10{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{03} = 8{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Porovnáním dostaneme $v_{01} > v_{02} > v_{03}$. S rostoucí počáteční výškou roste doba letu, čímž k dosažení stejné délky vrhu klesá velikost počáteční rychlosti.

4 body

b) V okamžiku dopadu je $v_\mathrm{d} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$.

Dosazením vztahů (1) a (2) dostaneme $v_\mathrm{d} = \sqrt{g\left(\dfrac{d^2}{2h} + 2h\right)}$.

Pro dané výšky vycházejí rychlosti dopadu $v_{\mathrm{d}1} = 18{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{\mathrm{d}2} = 17{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{\mathrm{d}3} = 19{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Porovnáním dostaneme $v_{\mathrm{d}3} > v_{\mathrm{d}1} > v_{\mathrm{d}2}$. Tentokrát rychlost dopadu z „prostřední“ výšky je nejmenší. Vysvětlení je složitější, velikosti rychlostí netvoří ani klesající ani rostoucí posloupnost. Velikost svislé složky rychlosti dopadu roste s výškou vrhu, vodorovná složka rychlosti, tedy velikost počáteční rychlosti, s rostoucí výškou vrhu klesá. Proto velkých rychlostí dopadu do daného místa dosáhneme vodorovným vrhem z velmi velké výšky nebo z velmi malé výšky. Úvahu lze ověřit dosazením extrémních výšek, např. pro $h = 60$ m vychází $v_\mathrm{d} = 34{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, pro $h = 1$ m vychází $v_\mathrm{d} = 33{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4 body

c) Ze skládání rychlostí v okamžiku dopadu dostaneme $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|v_y|}{v_x} = \dfrac{gt}{v_0}$.

Opět dosazením vztahů (1) a (2) dostaneme $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2h}{d}$.

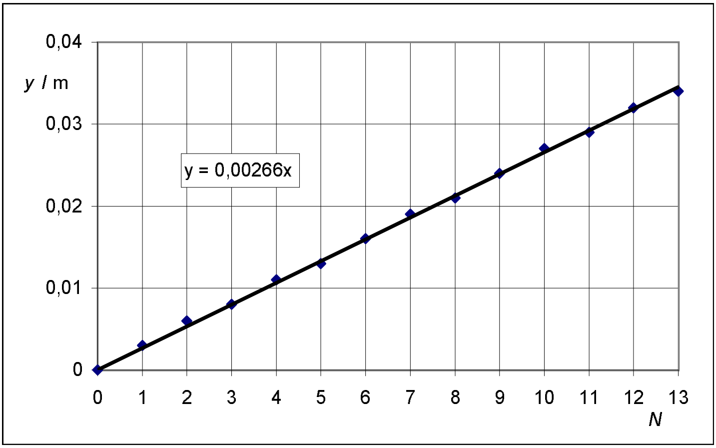
Pro dané výšky vycházejí úhly $\alpha_1 = 28°$, $\alpha_2 = 53°$, $\alpha_3 = 65°$.

2 body

6. Vnější průměr zkumavky změřený na několika místech v oblasti hladiny při zatěžování byl s přesností na desetiny milimetru stejný a dával hodnotu $d = 15{,}7$ mm.

Tabulka výsledků měření hloubky ponoru při různé zátěži a bodový graf proložený přímkou procházející počátkem s rovnicí funkční závislosti:

N	y / m
0	0
1	0,003
2	0,006
3	0,008
4	0,011
5	0,013
6	0,016
7	0,019
8	0,021
9	0,024
10	0,027
11	0,029
12	0,032
13	0,034



Směrnice přímky je $a = 0{,}002\,66$ m.
Hustota vody při pokojové teplotě je podle tabulek $\varrho = 998\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
Dosazením dostaneme

$$m = \frac{\pi}{4} d^2 \varrho a = \frac{\pi \cdot 0{,}015\,7^2 \cdot 998 \cdot 0{,}002\,66}{4}\ \mathrm{kg} = 0{,}000\,51\ \mathrm{kg} = 0{,}51\ \mathrm{g}.$$

Vážením 10 diabol na technických vahách byla zjištěna hmotnost 5,0 g, to znamená, že na jednu diabolu připadá hmotnost 0,50 g. Výsledky se liší o 2 %.

7. a) Pružinový systém se uvolní a jeho potenciální energie pružnosti se přemění na kinetickou energii obou částí tělesa:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \tag{1}$$

Obě části si udělí stejně velké hybnosti navzájem opačného směru, pro jejich velikost platí:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2. \tag{2}$$

Vyjádřením velikosti v_2 rychlosti, a poté v_1, z rovnice (2) a dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$E = \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2) m_1}{m_2} v_1^2, \qquad E = \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2) m_2}{m_1} v_2^2.$$

Z rovnic plyne

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{(m_1+m_2)m_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 72\cdot 0{,}9}{(0{,}6+0{,}9)0{,}6}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Em_1}{(m_1+m_2)m_2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 72\cdot 0{,}6}{(0{,}6+0{,}9)0{,}9}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

b) Celé těleso vystoupalo do výšky h_0, kterou určíme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2 = (m_1+m_2)gh_0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{3}$$

Porovnáním mechanické energie horní části tělesa bezprostředně po aktivaci a v nejvyšším místě její trajektorie dostaneme

$$m_1gh_0 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gh_1. \tag{4}$$

Z rovnic (3) a (4) plyne

$$h_1 = \frac{v_0^2+v_1^2}{2g} = 27{,}7\ \mathrm{m}. \tag{5}$$

2 body

c) Horní část tělesa dopadne z výšky h_1 volným pádem rychlostí, jejíž velikost určíme ze zákona zachování energie:

$$m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1v_{\mathrm{d}1}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{d}1} = \sqrt{2gh_1}.$$

Užitím (5) nakonec dostaneme

$$v_{\mathrm{d}1} = \sqrt{v_0^2+v_1^2} = \sqrt{20^2+12^2} = 23{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Porovnáním mechanické energie dolní části tělesa bezprostředně po aktivaci a v okamžiku dopadu dostaneme

$$m_2gh_0 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_{\mathrm{d}2}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{d}2} = \sqrt{2gh_0+v_2^2}.$$

Užitím (3) nakonec dostaneme

$$v_{\mathrm{d}2} = \sqrt{v_0^2+v_2^2} = \sqrt{20^2+8^2} = 21{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body