KNIHOVNIČKA FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY č. 87

54. ročník

F Y Z I K Á L N Í O L Y M P I Á D Y

ve školním roce 2012 – 2013

Úlohy pro kategorie E, F, G

INSTRUKTÁŽNÍ ŘEŠENÍ

HRADEC KRÁLOVÉ
2012

Pro učitele a organizátory opravující úlohy

Tento materiál je určen vyučujícím na školách a dalším organizátorům soutěže, kteří se budou podílet na opravách a vyhodnocení úloh. **Neměl by přijít do rukou žákům – řešitelům FO**, neboť obsahuje jedno řešení ke každé početní úloze a návrh bodování pro stanovení pořadí řešitelů a určení postupujících do vyššího (okresního) kola soutěže. Předložená řešení by neměla být považována za jedině možná nebo nejsprávnější, žáci mohou k výsledkům dojít jinou, vlastní cestou.

Pro každou úlohu je stanoveno 10 bodů. Plný počet bodů dostává řešitel, jestliže je úloha či její část řešena zcela bez chyb, nebo se v řešení vyskytují pouze drobné formální nedostatky. Jestliže řešení úlohy či její části v podstatě vystihuje úkol, ale má větší nedostatky po odborné stránce či vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky, je počet bodů snížen. Řešení je nevyhovující a přidělený počet bodů nízký nebo nulový, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné, nebo je řešení z větší části neúplné. Řešení je také nevyhovující, chybí-li slovní výklad, nebo je-li neúplný, takže z něho nelze vyvodit myšlenkový postup podaného řešení. Příznivé hodnocení tedy předpokládá, že protokol o řešení obsahuje fyzikální vysvětlení, z něhož jasně vyplývá myšlenkový postup při řešení daného problému. **U kategorií E a F je za úspěšného řešitele prvního kola považován soutěžící, který byl hodnocen v pěti úlohách alespoň 5 body za každou úlohu, přičemž řešil experimentální úlohu** (třeba i neúspěšně).

Řešení úloh prvního kola opraví učitel fyziky společně s referentem FO na škole. Po ukončení prvního kola navrhne referent FO na škole úspěšné řešitele k postupu do druhého (okresního) kola a odešle opravené úlohy všech řešitelů společně s návrhem postupujících příslušné okresní komisi fyzikální olympiády (OKFO). O zařazení řešitele do druhého kola soutěže rozhodne OKFO po kontrole opravených úloh a sjednocení klasifikace.

Texty úloh I. kola soutěže (po jeho ukončení i řešení) lze nalézt i na www stránkách, a to na adrese:

`www.fyzikalniolympiada.cz`, `www.uhk.cz/fo` nebo `cental.uhk.cz`.

Tam lze také najít seznam adres krajských komisí FO a odkaz na jejich webovské stránky. Naše adresa je:

`ivo.volf@uhk.cz`.

Hradec Králové, červenec 2012 ÚKFO

Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie E a F

1. Sjezdové lyžování

a) Pro průměrnou rychlost dostáváme
$v = 1800/60\,\mathrm{m/s} = 30\,\mathrm{m/s} = 108\,\mathrm{km/h}$. **1 bod**

b) Odporová síla vychází $F = kv^2 = 0,32 \cdot 30^2\,\mathrm{N} = 288\,\mathrm{N}$. **2 body**

c) Celková gravitační (tíhová) síla $F_\mathrm{g} = mg = 80\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 800\,\mathrm{N}$. Pohyb lyžaře ovlivňuje složka gravitační síly podél svahu, který považujeme za nakloněnou rovinu

$$F_1 = F_\mathrm{g}\frac{h}{L} = 800\,\mathrm{N} \cdot \frac{600\,\mathrm{m}}{1\,800\,\mathrm{m}} \doteq 270\,\mathrm{N}.$$

3 body

d) Při maximální rychlosti v_m bude odporová síla rovna složce gravitační síly podél svahu

$$F_1 = F_\mathrm{g}\frac{h}{L} = kv_\mathrm{m}^2.$$

Odtud vychází

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{mgh}{kL}} = \sqrt{\frac{80\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 600\,\mathrm{m}}{0{,}32\,\mathrm{kg/m} \cdot 1\,800\,\mathrm{m}}} \doteq 29\,\mathrm{m/s} = 104\,\mathrm{km/h}.$$

Vidíme, že podle dosažených časů se lyžaři pohybují průměrnou rychlostí blízkou této maximální rychlosti, podle přibližně zadaných veličin ji dokonce překračují, jde však především o ověření, zda pohyb lyžaře lze přibližně popsat naším modelem odporové síly závisející na v^2. **4 body**

2. Rovnoměrný pohyb cyklisty

a) Obvod kola $o = \pi d = \pi \cdot 0{,}59\,\mathrm{m} = 1{,}9\,\mathrm{m}$, čas $t = 0{,}5\,\mathrm{min} = 30\,\mathrm{s}$. Rychlost cyklisty vychází $v = 70o/t = 70 \cdot 1,9/30\,\mathrm{m/s} \doteq 4{,}3\,\mathrm{m/s} = 16\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

b) Jestliže je na zadním 18 zubů, bude počet otáček zadního kola $n_1 = 54/18 \cdot 45 = 135$, při 27 zubech pak $n_2 = 54/27 \cdot 45 = 90$. Podobně jako v části a) pak pro čas $t' = 40\,\mathrm{s}$ vycházejí rychlosti

$$v_1 = n_1\frac{o}{t'} = 135 \cdot \frac{1{,}9\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s}} \doteq 6{,}4\,\mathrm{m/s} = 23\,\mathrm{km/h},$$

$$v_1 = n_2\frac{o}{t'} = 90 \cdot \frac{1{,}9\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s}} \doteq 4{,}3\,\mathrm{m/s} = 15\,\mathrm{km/h}.$$

5 bodů

c) Okamžitý výkon je součinem síly a rychlosti, proto získáváme

$$P_1 = Fv_1 = 12{,}5\,\mathrm{N} \cdot 6{,}4\,\mathrm{m/s} = 80\,\mathrm{W},$$
$$P_2 = Fv_2 = 12{,}5\,\mathrm{N} \cdot 4{,}3\,\mathrm{m/s} = 54\,\mathrm{W}.$$

3 body

3. Cyklista a odpory proti pohybu

a) Velikosti odporové síly jsou v následující tabulce

Rychlost v km/h	18 km/h	27 km/h	36 km/h	45 km/h	54 km/h
Rychlost v m/s	5 m/s	7,5 m/s	10 m/s	12,5 m/s	15 m/s
$F = kv^2$	7,5 N	17 N	30 N	47 N	68 N

3 body

b) Pro výkon platí $P = Fv = kv^3$, pro jednotlivé rychlosti získáváme

Rychlost v km/h	18 km/h	27 km/h	36 km/h	45 km/h	54 km/h
Rychlost v m/s	5 m/s	7,5 m/s	10 m/s	12,5 m/s	15 m/s
$P = Fv = kv^3$	38 W	127 W	300 W	586 W	1 010 W

3 body

c) Ze vztahu pro výkon cyklisty $P = kv^3$ plyne

$$v_\mathrm{m} = \sqrt[3]{\frac{P}{k}} = \sqrt[3]{\frac{1\,800\,\mathrm{W}}{0{,}3\,\mathrm{kg/m}}} \doteq 18\,\mathrm{m/s} = 65\,\mathrm{km/h}.$$

2 body

d) Při rovnoměrném pohybu bude odporová síla rovna působící složce tíhové síly $F_\mathrm{g1} = 120\,\mathrm{N}$, odkud vychází

$$F_\mathrm{g1} = kv_\mathrm{m}^2; \qquad v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{F_\mathrm{g1}}{k}} = \sqrt{\frac{120\,\mathrm{N}}{0{,}3\,\mathrm{kg/m}}} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}.$$

2 body

4. Big Ben

Převedeme délky na jednotky SI – průměr ciferníku $d = 23 \cdot 0,3048\,\mathrm{m} = 7{,}0\,\mathrm{m}$, délka minutové ručičky $r_\mathrm{m} = 14 \cdot 0{,}304\,8\,\mathrm{m} = 4{,}3\,\mathrm{m}$ a hodinové ručičky $r_\mathrm{h} = 9 \cdot 0{,}304\,8\,\mathrm{m} = 2{,}7\,\mathrm{m}$.

a) Konec minutové ručičky oběhne vzdálenost $2\pi r_\mathrm{m}$ za $1\,\mathrm{h} = 3\,600\,\mathrm{s}$, konec hodinové ručičky vzdálenost $2\pi r_\mathrm{h}$ za $12\,\mathrm{h} = 43\,200\,\mathrm{s}$. Pro rychlost koncových bodů vychází

$$v_\mathrm{m} = \frac{2\pi \cdot 4{,}3\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 0{,}007\,5\,\mathrm{m/s} = 7{,}5\,\mathrm{mm/s},$$
$$v_\mathrm{h} = \frac{2\pi \cdot 2{,}7\,\mathrm{m}}{43\,200\,\mathrm{s}} = 0{,}000\,40\,\mathrm{m/s} = 0{,}40\,\mathrm{mm/s}.$$

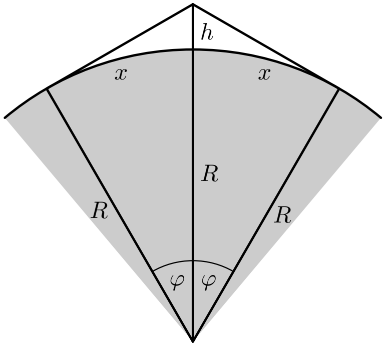
4 body

b) Okolí věže můžeme podle zadaní považovat za rovinné, a předpokládáme, že místa na povrchu Země jsou umístěna na ideální kulové ploše o poloměru 6 370 km (viz obr. 1).

Délka oblouku kružnice se v rámci našeho odhadu pro $h \ll R$ příliš neliší od kratší odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, lze proto psát

$$x^2 \approx (R+h)^2 - R^2 = h\,(2R+h) \approx 2Rh.$$

Odtud pro ciferník ve výšce $h_1 = 55\,\mathrm{m}$ vychází $x_1 \approx \sqrt{2Rh_1} = 26\,\mathrm{km}$, pro špičku věže ve výšce $h_2 = 96{,}3\,\mathrm{m}$ a $x_2 \approx \sqrt{2Rh_2} = 35\,\mathrm{km}$. jde však pouze o teoretickou hodnotu, ve skutečnosti je díky atmosférickým vlivům a výškovým budovám velkoměsta vidět na mnohem kratší vzdálenost. **6 bodů**



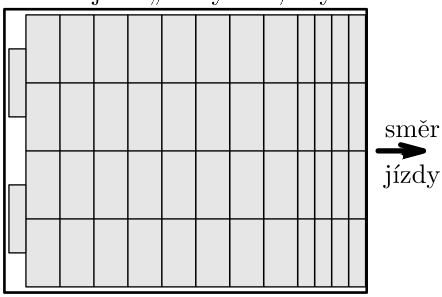
Obr. 1: K úloze 4

Pozn.: Úlohu lze řešit i pomocí goniometrických funkcí. Udáváme-li úhel φ v radiánech, lze psát $x = R\varphi$, kde $\cos\varphi = R/\,(R+h)$, číselné výsledky vycházejí stejné.

5. Doprava materiálu přívěsem

a) Objem přívěsu $V = 1{,}25\,\mathrm{m} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}36\,\mathrm{m} = 0{,}72\,\mathrm{m}^3 = 720\,\mathrm{dm}^3$. **2 body**

b) Příklad rozložení cihel je na obrázku (pohled seshora), řady vepředu ve směru jízdy a poslední řada jsou „na výšku“, zbytek naležato. **4 body**



c) Objem jedné cihly $V_1 = 30 \cdot 15 \cdot 7{,}5\,\mathrm{cm}^3 = 3\,375\,\mathrm{cm}^3 \doteq 3{,}4\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}003\,4\,\mathrm{m}^3$, její hmotnost $m_1 = 1800 \cdot 0{,}003\,4\,\mathrm{kg} = 6{,}1\,\mathrm{kg}$, hmotnost převážených padesáti cihel $50m_1 = 305\,\mathrm{kg}$. Písku můžeme naložit $(650 - 305)\,\mathrm{kg} = 345\,\mathrm{kg}$ o objemu $V_\mathrm{p} = 345/1600\,\mathrm{m} \doteq 0{,}216\,\mathrm{m}^3 = 216\,\mathrm{dm}^3$. Je-li obsah dna $200\,\mathrm{dm}^2$, bude výška vrstvy písku $h = 216/200\,\mathrm{dm} \doteq 1{,}1\,\mathrm{dm} = 11\,\mathrm{cm}$. Máme tak zajištěno, že ani u cihel položených „na výšku“ 15 cm nepřekročíme celkovou výšku přívěsu 36 cm. **4 body**

6. Cestování v Pacifiku kdysi a dnes

Jeden uzel odpovídá rychlosti 0,514 m/s=1,85 km/h (viz např. `www.jednotky.cz`).

a) Podle zadání vychází vzdálenost $s_1 = vt_1 = 13 \cdot 1{,}85\,\mathrm{km/h} \cdot 160\,\mathrm{h} \doteq 3\,850\,\mathrm{km}$. Pomocí Google Maps odhadneme vzdálenost na 3 900 km. **2 body**

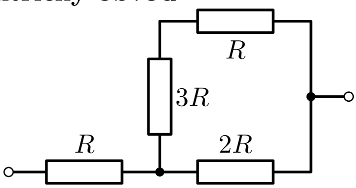
b) Rychlost letadla vychází $v_\mathrm{B} = 3900/5\,\mathrm{km/h} = 780\,\mathrm{km/h}$. **1 bod**

c) Doba plavby $t_2 = 16\,\mathrm{d} = 384\,\mathrm{h}$, podobně jako v případě a) dostáváme $s_2 = vt_2 = 13 \cdot 1{,}85\,\mathrm{km/h} \cdot 384\,\mathrm{h} \doteq 9\,240\,\mathrm{km}$. **2 body**

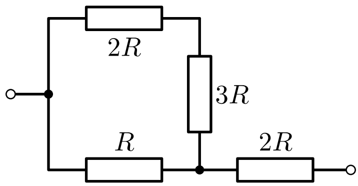
d) Pro dobu letu platí $t_2' = s_2/v_\mathrm{B} = 9240/780\,\mathrm{h} = 11{,}8\,\mathrm{h} \doteq 12\,\mathrm{h}$. **1 bod**

e) Časy udávané v letových řádech většinou udávají místní čas v místech odletu a příletu. Hodiny v místech směrem na výhod ukazují více hodin než hodiny v místech směrem na západ. Při letech mezi Jokohamou a San Fransiscem ale navíc překračujeme dohodnutou datovou hranici (180° zeměpisné délky). Pokud by např. v San Franciscu při startu bylo 9 h dopoledne 1. února, bylo by zároveň v Jokohamě 2 h ráno 2. února a po 12 h letu by letadlo přistálo v Jokohamě 2. února ve 14 h. Při cestě přes datovou hranici směrem na západ tak „den získáme“, při cestě na východ naopak „ztratíme“, což si na vlastní kůži vyzkoušeli i hrdinové Verneova románu Cesta kolem světa za 80 dní. Další detail ovlivňující místní čas je skutečnost, že v Japonsku se na rozdíl od Kalifornie nepřechází v letních měsících na letní čas (viz např. `http://www.worldtimezone.com` nebo `http://www.timeanddate.com`). **4 body**

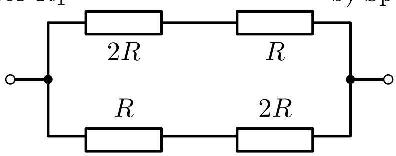
7. Elektrický obvod



a) Spálený rezistor R_1



b) Spálený rezistor R_2



c) Spálený rezistor R_3

a) Vzhledem k symetrickému zapojení rezistorů mohou nastat tři různé případy znázorněné na obrázcích, při spáleném rezistoru R_4 bude celkový odpor stejný jako při přepáleném rezistoru R_2 (případ b), podobně při spáleném R_5 je výsledný odpor stejný jako při spáleném R_1 (případ a). Odpor v jednotlivých případ bude

$$R_\mathrm{a} = R + \frac{2R \cdot 4R}{2R + 4R} = \frac{7}{3}R = 56\,\Omega$$
$$R_\mathrm{b} = 2R + \frac{R \cdot 5R}{R + 5R} = \frac{17}{6}R = 68\,\Omega$$
$$R_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\,(R + 2R) = \frac{3}{2}R = 36\,\Omega.$$

5 bodů

b) Největší proud prochází při nejmenším celkovém odporu (případ c), nejmenší při největším odporu (případ b):

$$I_\mathrm{max} = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{6}{36}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}17\,\mathrm{A}, \qquad I_\mathrm{min} = \frac{U}{R_\mathrm{b}} = \frac{6}{68}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}088\,\mathrm{A}.$$

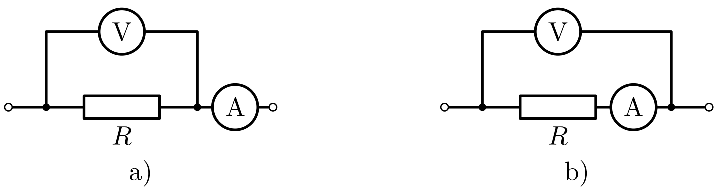
2 body

c) Pro výkon platí $P = RI^2 = U^2/R$, bude podobně jako proud největší v případě c) a nejmenší v případě b):

$$P_\mathrm{max} = \frac{U^2}{R_\mathrm{c}} = \frac{6^2}{36}\,\mathrm{A} = 1{,}0\,\mathrm{W}, \qquad P_\mathrm{min} = \frac{U^2}{R_\mathrm{b}} = \frac{6^2}{68}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}53\,\mathrm{A}.$$

3 body

8. Připojení měřicích přístrojů



Obr. 2: Zapojení voltmetru a ampérmetru pro měření odporu

a) Schémata možných zapojení pro měření odporu tzv. Ohmovou metodou jsou na obr. 2. **2 body**

b) Zapojení a) je vhodné pro měření malých odporů ($R_1 = 0{,}50\,\Omega$), zapojení b) pro měření velkých odporů ($R_2 = 3\,000\,\Omega$). V případě b) měří voltmetr celkové napětí na rezistoru a ampérmetru, pokud je odpor rezistoru srovnatelný s odporem ampérmetru, nelze tento rozdíl zanedbat. **2 body**

c) V zapojení podle obr. 2a je celkový odpor obvodu a celkový proud, který naměříme ampérmetrem:

$$R_\mathrm{ca} = R_\mathrm{A} + \frac{RR_\mathrm{V}}{R + R_\mathrm{V}} = \begin{cases} 0{,}6\,\Omega \\ 2\,000\,\Omega \end{cases} \qquad I_\mathrm{ca} = \frac{U}{R_\mathrm{ca}} = \begin{cases} 10\,\mathrm{A} & \text{pro } R_1 \\ 0{,}003\,\mathrm{A} & \text{pro } R_2 \end{cases}$$

Dále určíme proud protékající rezistorem a napětí na rezistoru naměřené voltmetrem:

$$I_R = \frac{R_\mathrm{V}}{R + R_\mathrm{V}} I_\mathrm{ca} = \begin{cases} 10\,\mathrm{A} \\ 0{,}002\,\mathrm{A} \end{cases} \qquad U_R = U - R_\mathrm{A} I_\mathrm{ca} = \begin{cases} 5{,}0\,\mathrm{V} \\ 6{,}0\,\mathrm{V} \end{cases}$$

Podělením napětí U_R a proudu I_ca vycházejí hodnoty $R'_1 = 0{,}5\,\Omega$, $R'_2 =$ $= 2\,000\,\Omega$. Podobně pro zapojení podle obr. 2b naměříme voltmetrem napětí 6 V, celkový odpor obvodu a celkový proud vychází:

$$R_\mathrm{cb} = \frac{R_\mathrm{V}\,(R_\mathrm{A} + R)}{R_\mathrm{V} + R_\mathrm{A} + R} = \begin{cases} 0{,}6\,\Omega \\ 2\,000\,\Omega \end{cases} \qquad I_\mathrm{cb} = \frac{U}{R_\mathrm{cb}} = \begin{cases} 10\,\mathrm{A} & \text{pro } R_1 \\ 0{,}003\,\mathrm{A} & \text{pro } R_2 \end{cases}$$

Proud naměřený ampérmetrem protéká i měřeným rezistorem a bude mít velikost

$$I_R = \frac{R_\mathrm{V}}{R + R_A + R_\mathrm{V}} I_\mathrm{cb} = \begin{cases} 10\,\mathrm{A} \\ 0{,}002\,\mathrm{A} \end{cases}$$

Podělením napětí $U_V = 6\,\mathrm{V}$ a proudu I_cb vycházejí hodnoty $R''_1 = 0{,}6\,\Omega$, $R''_2 = 3\,000\,\Omega$. **6 bodů**

9. Vodní elektrárna

a) Poloha elektrárny je vyznačena na obrázku. **1 bod**

b) V tabulkách nebo na internetu zjistíme, že $1\,\mathrm{ft} = 0{,}305\,\mathrm{m}$, příslušné údaje jsou potom: délka tunelů $l = 2\,700\,\mathrm{ft} = 824\,\mathrm{m}$, jejich průměr $d = 41\,\mathrm{ft} =$ $= 12{,}5\,\mathrm{m}$ a objemový průtok $Q = 200\,000\,\mathrm{ft}^3/\mathrm{s} \doteq 5\,670\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. **3 body**

c) Instalovaný výkon je $P = 5 \cdot 165\,\mathrm{MV} + 3 \cdot 157\,\mathrm{MW} \doteq 1\,300\,\mathrm{MW}$. **1 bod**

d) Počet hodin za jeden nepřestupný kalendářní rok je $365 \cdot 24\,\mathrm{h} = 8\,760\,\mathrm{h}$. Z celkové vyrobené energie a instalovaného výkonu vychází doba plného provozu

$$t = \frac{3{,}46 \cdot 10^9\,\mathrm{kWh}}{1\,300\,\mathrm{MW}} = \frac{3{,}46 \cdot 10^6\,\mathrm{MWh}}{1\,300\,\mathrm{MW}} = 2\,660\,\mathrm{h};$$

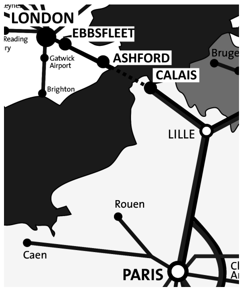
pro součinitel využití tak dostáváme $2660/8760 \doteq 30\,\%$. Činnost vodní elektrárny je závislá na řadě faktorů (sucho), je nutné vyhradit i čas na nutnou údržbu. **2 body**

e) Vyjdeme ze zákona zachování energie. Pokud zanedbáme ztráty, výkon musí odpovídat pohybové energii vody, která za sekundu proteče oběma tunely, jejichž celkový průřez má obsah $S = 2\pi d^2/4 = 245\,\mathrm{m}^2$. Protože objemový průtok $Q = Sv$ je součinem obsahu průřezu a rychlosti, rychlost tekoucí vody je Q/S, za jednu sekundu proteče voda o hmotnosti $m = \varrho Q$, kde $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$. Pohybová energie vody, která protoče tunely za sekundu pak vychází

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\varrho Q\frac{Q^2}{S^2} = P; \qquad Q = \sqrt[3]{\frac{2PS^2}{\varrho}} = 5\,400\,\mathrm{m^3/s}.$$

3 body

10. Rychlovlaky na trati Londýn–Paříž a zpět



Uvedené řešení bylo zpracováno podle jízdního řádu platného do prosince 2012 pro pondělí 26. 11. 2012. Nový jízdní řád pro rok 2013 může obsahovat drobné změny, stejně tak časy víkendových spojů nebo sezónních spojů se mohou lišit. Na principu úlohy to však nic nemění.

Vlaky z London St. Pancras do Paris Nord (čas jízdy 2 h 16 min):

Číslo spoje EST	9030	9034	9038	9044	9046	9050	9054
London	14:01	15:01	16:01	17:31	18:01	19:01	20:01
Paris	17:17	18:17	19:17	20:47	21:17	22:17	23:17

Vlaky z Paris Nord do London St. Pancras (čas jízdy 2 h 17 min):

Číslo spoje EST	9027	9047
Paris	12:13	17:13
London	13:30	18:30

Ve směru z Paříže do Londýna většina vlaků zastavuje také ve stanicích Ashford nebo Ebbsfleet, takže nevyhovují zadání úlohy. **2 body**

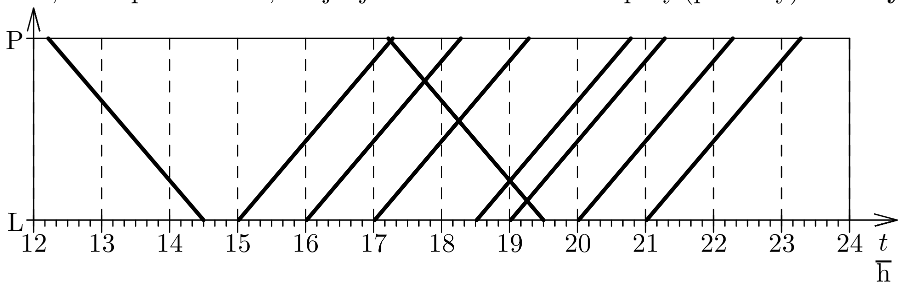
a) Znázornění trasy podle stránek dopravce `www.eurostar.com` je na obrázku. Odhad vzdálenosti pomocí význačných míst (London–Asford–Calais–Lille–Paris) dává hodnotu okolo 450 km. **1 bod**

b) Doba jízdy z Londýna do Paříže je 2,27 h, v opačném směru 2,28 h, takže rychlosti v těchto směrech jsou 220 km/h, resp. 219 km/h. **1 bod**

c) Tunel je dlouhý 50 km, z toho 38 km vede pod mořským dnem, nejhlubší místo je 250 m pod hladinou moře (viz např. `http://www.channeltunnel.org.uk/facts.htm`). **1 bod**

d) Doba jízdy tunelem je $t_\mathrm{t} = 50/160\,\mathrm{h} \doteq 0{,}32\,\mathrm{h} = 19\,\mathrm{min}$. Zbytek trasy o délce $499\,\mathrm{km} - 50\,\mathrm{km} = 449\,\mathrm{km}$ lze maximální rychlostí ujet za $449/300\,\mathrm{h} \doteq 1{,}50\,\mathrm{h}$. Pokud by se vlak pohyboval celou dobu maximální možnou rychlostí, trvala by cesta asi 1,82 h, což je méně, než skutečná doba jízdy. Pokud bychom pouze odečetli čas příjezdu a čas odjezdu udávaný jízdním řádem, pak pro cestu z Londýna do Paříže získáváme 3 h 16 min, pro cestu zpět pouze 1 h 17 min. Tato skutečnost je dána tím, že v Paříži se navzdory její zeměpisné poloze používá středoevropský čas, zatímco v Londýně greenwichský, jenž je oproti našemu posunutý o hodinu dozadu. **2 body**

e) Příklad grafu je na přiloženém obrázku; Londýn je označen písmenem L, Paříž písmenem P, čas je sjednocen na středoevropský (pařížský). **3 body**



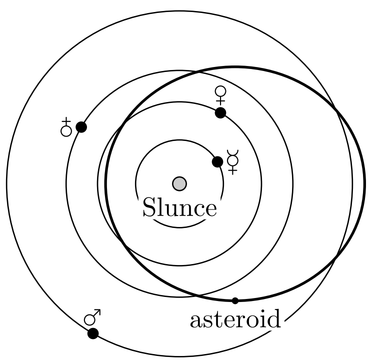
11. Neobvykle velký asteroid v blízkosti Země

a) Je-li vzdálenost Země od Slunce $a_{\mathrm{Z}} = 1\,\mathrm{AU}$ a doba oběhu okolo slunce $T_{\mathrm{Z}} = 1\,\mathrm{rok}$, použitím 3. Keplerova zákona dostáváme

$$\frac{T^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} = \frac{a^3}{a_{\mathrm{Z}}^3}; \quad \Longrightarrow \quad T = T_{\mathrm{Z}}\sqrt{\frac{a^3}{a_{\mathrm{Z}}^3}} = 1\,\mathrm{rok} \cdot \sqrt{1,143^3} \doteq 1{,}22\,\mathrm{let}.$$

3 body

b) V tabulkách nebo na internetu najdeme vzdálenosti vnitřních planet od Slunce: Merkur 0,387 AU, Venuše 0,723 AU, Země 1 AU, Mars 1,525 AU; dráhu těchto planet může asteroid protnout. Schematické znázornění je na obrázku, výstřednost dráhy planet (zejména Merkuru) je zanedbána, velikosti planet ani asteroidu nejsou ve správném měřítku. Pro popisky planet jsou užity odpovídající astronomické symboly. **3 body**



c) Pokud považujeme asteroid za kouli, odhadneme jeho hmotnost

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = \frac{4}{3}\pi \cdot [(360 \pm 40)\ \mathrm{m}]^3 \cdot 2\,500\,\mathrm{kg/m^3} = (3,4 - 6,7) \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg}.$$

2 body

d) Uznatelná je odpověď obsahující rozumné údaje. **2 body**

12. Elektrická vozová souprava

a) Pokud se vlak pohyboval delší dobu větší rychlostí (bez zpomalování), urazil vzdálenost mezi stanicemi v kratším čase. **1 bod**

b) Doba zrychlování soupravy $t_1 = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$, doba zpomalování $t_2 = 4\,\mathrm{min} = 240\,\mathrm{s}$, maximální dosažená rychlost $v = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$. Vzdálenost, kterou souprava ujela první den, je rovna stínované ploše na grafu závislosti $v = v(t)$, tj. obsahu dvou trojúhelníků

$$s = \frac{1}{2}vt_1 + \frac{1}{2}vt_2 = \frac{1}{2}v\,(t_1 + t_2) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (120 + 240)\ \mathrm{m} = 4\,500\,\mathrm{m}.$$

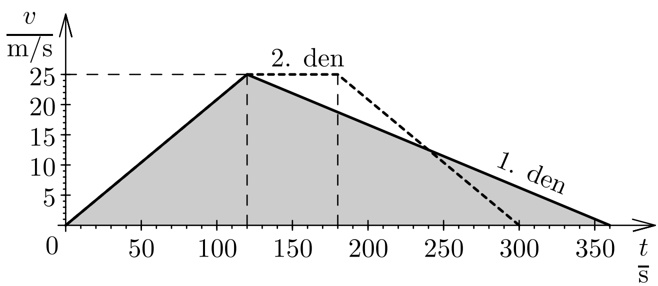
3 body

c) Druhý den souprava zpomalovala pouze po dobu $t_2' = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$ a při zrychlování a zpomalování ujela vzdálenost

$$s' = \frac{1}{2}vt_1 + \frac{1}{2}vt_2' = \frac{1}{2}v\,(t_1 + t_2') = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (120 + 120)\ \mathrm{m} = 3\,000\,\mathrm{m}.$$

Rozdíl $s - s' = 1\,500\,\mathrm{m}$ pak rychlostí v ujela za čas $t_3 = 1500/25\,\mathrm{s} = 60\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{min}$. Celková doba jízdy druhý den byla $t_1 + t_2' + t_3 = 2 + 2 + 1\,\mathrm{min} = 5\,\mathrm{min} = 300\,\mathrm{s}$. **3 body**

d) Graf závislosti $v = v(t)$ je na obrázku. **3 body**



13. Curieova teplota

a) Teplo potřebné k zahřátí železné součástky vychází $Q = m_ž c_ž\,(t_{800} - t_{20}) = 0{,}48\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg{\cdot}°C)} \cdot 780\,°\mathrm{C} = 172\,\mathrm{kJ}$. **4 body**

b) Hmotnost vody o objemu 2 l je $m_\mathrm{v} = 2\,\mathrm{kg}$. Vyjdeme z kalorimetrické rovnice

$$m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} \left(t - t_{20}\right) = m_\mathrm{ž} c_\mathrm{ž} \left(t_{800} - t\right).$$

Po vyjádření výsledné teploty t vychází

$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{20} + m_\mathrm{ž} c_\mathrm{ž} t_{800}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + m_\mathrm{ž} c_\mathrm{ž}} = \frac{2 \cdot 4200 \cdot 20 + 0,48 \cdot 460 \cdot 800}{2 \cdot 4200 + 0,48 \cdot 460} = 40\,\mathrm{°C}.$$

4 body

c) Pokud vložíme do lázně tři železné součástky, obdobným způsobem dostáváme

$$t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_{20} + 3 m_\mathrm{ž} c_\mathrm{ž} t_{800}}{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} + 3 m_\mathrm{ž} c_\mathrm{ž}} = \frac{2 \cdot 4200 \cdot 20 + 3 \cdot 0,48 \cdot 460 \cdot 800}{2 \cdot 4200 + 3 \cdot 0,48 \cdot 460} = 77\,\mathrm{°C}.$$

2 body

14. Rychlovarná konvice

a) K zahřátí objemu $V = 0{,}9\,\mathrm{l} = 0{,}000\,9\,\mathrm{m^3}$ vody o hustotě $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, měrně tepelné kapacitě $c = 4\,200\,\mathrm{J/(kg{\cdot}°C)}$ o $\Delta t = 100\,\mathrm{°C} - 18\,\mathrm{°C} = 82\,\mathrm{°C}$ je potřeba teplo $Q = V\varrho c \Delta t$. Konvice o příkonu P a účinnosti $\eta = 80\,\%$ dodá za čas τ teplo $Q = \eta P \tau$. Z rovnosti dostáváme

$$\tau = \frac{V\varrho c \Delta t}{\eta P} = \frac{0,0009 \cdot 1000 \cdot 4200 \cdot 82}{0,8 \cdot P}\,\mathrm{s}.$$

Pro příkon 1 800 W vychází $\tau_1 = 215\,\mathrm{s} \doteq 3{,}6\,\mathrm{min}$, pro příkon 2 000 W vychází $\tau_2 = 194\,\mathrm{s} \doteq 3{,}2\,\mathrm{min}$. **4 body**

b) K vypaření vody o hmotnosti m' je zapotřebí dodat teplo $Q' = m' l_\mathrm{v}$, kde $l_\mathrm{v} = 2{,}26\,\mathrm{MJ/kg}$. Pokud byla konvice zapnutá po dobu $\tau' = 28\,\mathrm{min} = 1\,680\,\mathrm{s}$ a vodu přivede do varu za dobu $\tau_2 = 194\,\mathrm{s}$, dostáváme

$$m' = \frac{\eta P_2 \left(\tau' - \tau_2\right)}{l_\mathrm{v}} = \frac{0.8 \cdot 2000 \cdot (1680 - 194)}{2\,260\,000}\,\mathrm{kg} = 1{,}05\,\mathrm{kg}.$$

Stejným postupem pro menší příkon 1 800 W a čas τ_1 vychází

$$m' = \frac{\eta P_1 \left(\tau' - \tau_1\right)}{l_\mathrm{v}} = \frac{0.8 \cdot 1800 \cdot (1680 - 215)}{2\,260\,000}\,\mathrm{kg} = 0{,}93\,\mathrm{kg}.$$

Výsledek je v obou případech větší než počáteční hmotnost vody v konvici $V\varrho = 0{,}9\,\mathrm{kg}$, všechna voda by se tak vypařila. většina dnešních rychlovarných konvic má pro tento případ pojistku, takže konvice by se sama vypnula. **6 bodů**

15. Stavební panely

a) Práce na vyzvednutí panelu je rovna změně jeho polohové energie $W = mgh = 2400 \cdot 9,8 \cdot 27,60\,\mathrm{J} = 649\,\mathrm{kJ}$. **2 body**

b) Výkon je dán podílem práce a času $P = W/t = 649\,000\,72\,\mathrm{W} = 9\,020\,\mathrm{W}$. **2 body**

c) Při účinnost $\eta = 60\,\%$ musí být výkon elektromotoru $P_0 = P/\eta = 9020/0.6 = 15{,}0\,\mathrm{kW}$. **2 body**

d) Plocha panelu je $S_1 = 3 \cdot 2{,}4\,\mathrm{m}^2 = 7{,}2\,\mathrm{m}^2$, plocha stropu $S = 15 \cdot 24\,\mathrm{m}^2 = 360\,\mathrm{m}^2$, na zakrytí stropu potřebujeme $360/7,2 = 50$ panelů. Jeřáb musí vykonat práci $50W = 32{,}5\,\mathrm{MJ}$. **2 body**

e) $1\,\mathrm{kWh} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$, elektromotor musí vykonat práci $50W/\eta = 54{,}1\,\mathrm{MJ} = 15{,}0\,\mathrm{kWh}$. **2 body**

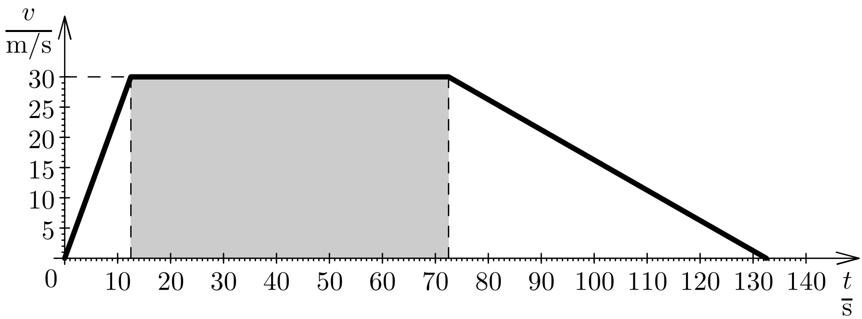
Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie G – Archimédiáda

1. Zkušební okruh

Rychlost je vhodné převést: $v = 108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$.

a) Příklad grafu je na obrázku. **3 body**



b) Rovnoměrným pohybem se automobil pohybuje ve druhém, vybarveném úseku. Pro dráhu platí $s_2 = v \cdot t_2 = 30\,\mathrm{m/s} \cdot 60\,\mathrm{s} = 1\,800\,\mathrm{m} = 1{,}8\,\mathrm{km}$.
2 body

c) Dráha uražená při zrychlování je rovna obsahu plochy trojúhelníka pod grafem závislosti $s = s(t)$, tedy $s_1 = ½ \cdot v \cdot t_1 = ½ \cdot 30\,\mathrm{m/s} \cdot 12{,}5\,\mathrm{s} = 187{,}5\,\mathrm{m} \doteq 188\,\mathrm{m}$. Podobně pro zpomalování dostáváme $s_3 = ½ \cdot v \cdot t_3 = ½ \cdot 30\,\mathrm{m/s} \cdot 60\,\mathrm{s} = 900\,\mathrm{m}$. **3 body**

d) Celková dráha $s = s_1 + s_2 + s_3 = 188\,\mathrm{m} + 1\,800\,\mathrm{m} + 900\,\mathrm{m} = 2\,888\,\mathrm{m} \doteq 2\,890\,\mathrm{m}$, celkový čas $t = t_1 + t_2 + t_3 = 12{,}5\,\mathrm{s} + 60\,\mathrm{s} + 60\,\mathrm{s} = 132{,}5\,\mathrm{s} \doteq 133\,\mathrm{s}$. Pro průměrnou rychlost získáváme $v_\mathrm{p} = s/t = 2\,890\,\mathrm{m}/133\,\mathrm{s} \doteq 21{,}7\,\mathrm{m/s} = 78{,}2\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

2. Lodičky plující proti proudu i po proudu

Označme rychlost pramice na klidné vodě $v_\mathrm{p} = 0{,}9\,\mathrm{m/s}$, rychlost vody v řece $v_\mathrm{ř} = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$.

a) Rychlost pramice se skládá s rychlostí vody v řece, po proudu vychází $v_+ = v_\mathrm{p} + v_\mathrm{ř} = 1{,}4\,\mathrm{m/s}$, proti proudu $v_- = v_\mathrm{p} - v_\mathrm{ř} = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$. **2 body**

b) Vzdálenost $s = 1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$ po proudu urazí pramice za čas $t_+ = s/v_+ = 1000/1,4\,\mathrm{s} \doteq 714\,\mathrm{s}$, proti proudu za čas $t_- = s/v_- = 1000/0,4\,\mathrm{s} = 2\,500\,\mathrm{s}$. Celkový čas pak vychází $t = t_+ + t_- = 3\,214\,\mathrm{s} \doteq 54\,\mathrm{min} \doteq 0{,}89\,\mathrm{h}$. Doba jízdy tam a zpět *nezávisí* na tom, zda pramice jede nejprve po proudu a pak proti proudu nebo naopak. **4 body**

c) Z předchozího výpočtu je zřejmé, že doba jízdy tam a zpět je přímo úměrná vzdálenosti s, do níž pramice dojede. Jestliže do místa vzdáleného $1\,\mathrm{km}$ a zpět dojede pramice za $0{,}89\,\mathrm{h}$, za $2\,\mathrm{h}$ může dojet do místa vzdáleného $1\,\mathrm{km} \cdot 2/0,89 \doteq 2{,}2\,\mathrm{km}$. **4 body**

3. Na trati Paris Nord – Bruxelles-Midi a zpět

Uvedené řešení bylo zpracováno podle jízdního řádu platného do prosince 2012 pro pondělí 26. 11. 2012. Nový jízdní řád pro rok 2013 může obsahovat drobné změny, stejně tak časy víkendových spojů nebo sezónních spojů se mohou lišit. Na principu úlohy to však nic nemění.

a) Vlaky z Paris Nord do Bruxelles-Midi (čas jízdy 1 h 22 min):

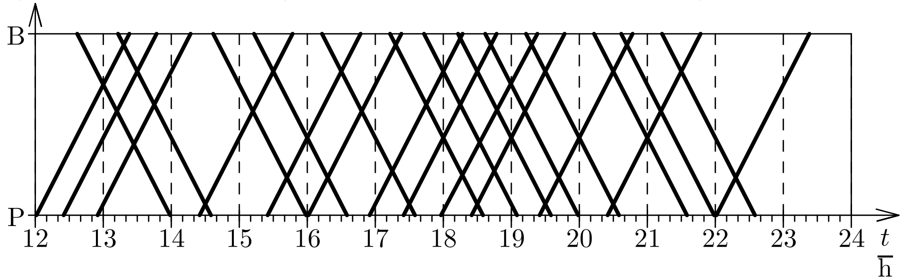
Číslo spoje THA	9437	9339	9341	9351	9357	9361	9365	9369	9473	9375	9381	9387	9397
Paris Nord	12:01	12:25	12:55	14:25	15:25	16:01	16:55	17:25	17:58	18:25	19:25	20:25	22:01
Bruxelles-Midi	13:23	13:47	14:17	15:47	16:47	17:23	18:17	18:47	19:23	19:47	20:47	21:47	23:23

Vlaky z Bruxelles-Midi do Paris Nord (čas jízdy 1 h 22 min):

Číslo spoje THA	9336	9340	9348	9352	9358	9364	9368	9470	9472	9376	9382	9484	9388
Paris Nord	12:37	13:13	14:37	15:13	16:13	17:13	17:43	18:13	18:37	19:13	20:13	20:37	21:13
Bruxelles-Midi	13:59	14:35	15:59	16:35	17:35	18:35	19:05	19:35	19:59	20:35	21:35	21:59	22:35

3 body

b) Graf je na obrázku (P – Paris Nord, B – Bruxelles-Midi). **3 body**



c) Pro dobu jízdy $t = 1\,\mathrm{h}\ 22\,\mathrm{min} \doteq 1{,}37\,\mathrm{h}$ a dvě různé zadané vzdálenosti $s_1 = 289\,\mathrm{km}$, $s_2 = 302\,\mathrm{km}$ vychází průměrná rychlost $v_1 = s_1/t \doteq 211\,\mathrm{km/h}$, popř. $v_2 = s_2/t \doteq 221\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

d) Vzdálenost z železniční stanice Praha hl. n. do stanice Hradce Králové hl. n. měří 116 km. Rychlostmi v_1, resp. v_2 vypočítanými v předcházející části by vlak urazil tuto vzdálenost za $0{,}55\,\mathrm{h} = 33\,\mathrm{min}$, resp. za $0{,}52\,\mathrm{h} = 31\,\mathrm{min}$. Doba jízdy rychlíků ČD na této trati je asi 1 h 40 min, vlaky však zastavují na trase v několika stanicích a trať nedovoluje tak vysokou rychlost. **2 body**

4. Plotová podezdívka

a) Objem jedné cihly je
$V = 290\,\mathrm{mm} \cdot 290\,\mathrm{mm} \cdot 290\,\mathrm{mm} = 24\,389\,000\,\mathrm{mm}^3 \doteq 0{,}024\,\mathrm{m}^3$,
hmotnost pak podle zadání $m = 44\,\mathrm{kg}$. Pro hustotu dostáváme $\varrho = m/V = 44/0,024\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 1\,800\,\mathrm{kg/m^3}$. **4 body**

b) Obvod parcely vychází $2 \cdot (24 + 36) = 120\,\mathrm{m}$. Cihly budou rozmístěny po obvodu s výjimkou branky o šířce 1,2 m a vjezdu o šířce 1,8 m, takže budou položeny v délce $120\,\mathrm{m} - 1{,}2\,\mathrm{m} - 1{,}8\,\mathrm{m} = 117\,\mathrm{m}$. Počet cihel po obvodu pak musí být $117/0,29 \doteq 404$, na sloupek potřebujeme $116/29 = 4$, jedna z nich je však již započítána v obvodu. Celkem potřebujeme $n = 404+3 = 407$ cihel o hmotnosti $n \cdot m = 407 \cdot 44\,\mathrm{kg} = 17\,908\,\mathrm{kg} \doteq 18\,\mathrm{t}$. **5 bodů**

c) Nemůžeme, hmotnost cihel je větší. **1 bod**

Řešení úloh pro kategorie E, F, G připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky pod vedením I. Volfa, za spolupráce M. Jarešové, P. Kabrhela, M. Randy, L. Richterka a J. Thomase. Autorem experimentální úlohy pro kategorie E a F je Ľubomír Konrád.

ISBN 978-80-86148-99-8
Vytiskla tiskárna ASTRA PRINT Hradec Králové