Řešení úloh 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (4), M. Jarešová (5), J. Thomas (1, 3), P. Šedivý (2, 6, 7),

1. a) Působiště tíhových sil $\boldsymbol{F}_{G1}$, $\boldsymbol{F}_{G2}$ působících na ramena nosníku jsou v jejich středu (obr. R1). Podle Euklidovy věty o odvěsně

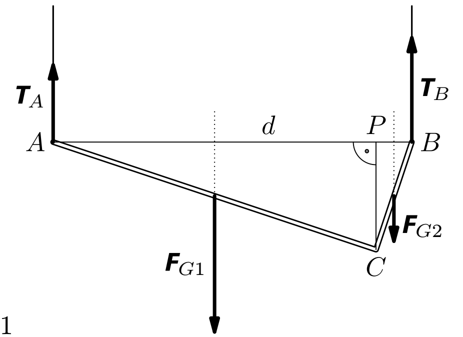
$$\frac{|AP|\cdot|AB|}{|BP|\cdot|AB|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}=9 \quad\Rightarrow\quad |AP|=0{,}9d, \quad |BP|=0{,}1d,$$

kde $d=|AB|$. Vektorové přímky sil $\boldsymbol{F}_{G1}$ a $\boldsymbol{F}_{G2}$ procházejí ve vzdálenostech $0{,}45d$ a $0{,}95d$ od bodu A. Podle momentové věty

$$T_B\cdot d=F_{G1}\cdot 0{,}45d+F_{G2}\cdot 0{,}95d=0{,}75mg\cdot 0{,}45d+0{,}25mg\cdot 0{,}95d=0{,}575mgd,$$

$$T_B=0{,}575mg, \quad T_A=0{,}425mg.$$

4 body

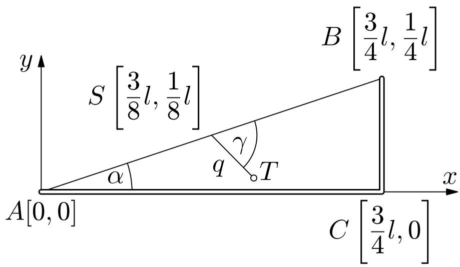


Obr. R1

b) Vlákna a přepona nosníku tvoří rovnoramenný trojúhelník OAB. V ustálené poloze se těžiště T bude nacházet pod bodem závěsu O (obr. R3).

Abychom určili polohu těžiště, zavedeme podle obr. R2 pomocnou souřadnicovou soustavu. Jednoduchým výpočtem dostaneme $T=\left[\frac{15}{32}l,\frac{1}{32}l\right]$. Vektor $\overrightarrow{ST}=\left(\frac{3}{32}l,-\frac{3}{32}l\right)$ má velikost

$$q=|ST|=\frac{\sqrt{18}}{32}l=0{,}1326l$$



Obr. R2

a od osy x odchylku 45°. Od úsečky AB je tedy odchýlen o

$$\gamma=45^\circ+\alpha=45^\circ+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=45^\circ+18{,}43^\circ=63{,}43^\circ.$$

Nyní se můžeme vrátit k obr. 3. Užitím Pythagorovy věty určíme

$$|AB| = d = \frac{\sqrt{10}}{4} l = 0{,}790\,57 l, \quad |AS| = \frac{d}{2} = 0{,}395\,28 l,$$

$$|OS| = v = \frac{\sqrt{54}}{8} l = 0{,}918\,56 l.$$

Abychom určili odchylku φ, vyřešíme trojúhelník OST užitím kosinové a sinové věty: Platí

$$\beta = \arcsin \frac{d}{2l} = 23{,}28^\circ.$$

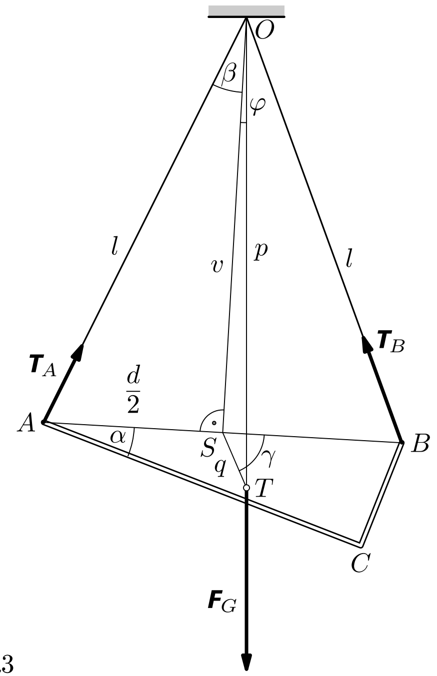
$$|OT| = p = \sqrt{v^2 + q^2 - 2vq\cos(R+\gamma)} = 1{,}038\,84 l,$$

$$\sin\varphi = \frac{q}{p}\sin(R+\gamma) = 0{,}057\,09, \quad \varphi = 3{,}27^\circ.$$

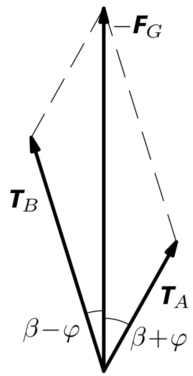
Z vektorového rovnoběžníku na obr. R4 určíme užitím sinové věty

$$T_A = F_G \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin 2\beta} = 0{,}471 mg, \quad T_B = F_G \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin 2\beta} = 0{,}616 mg.$$

6 bodů



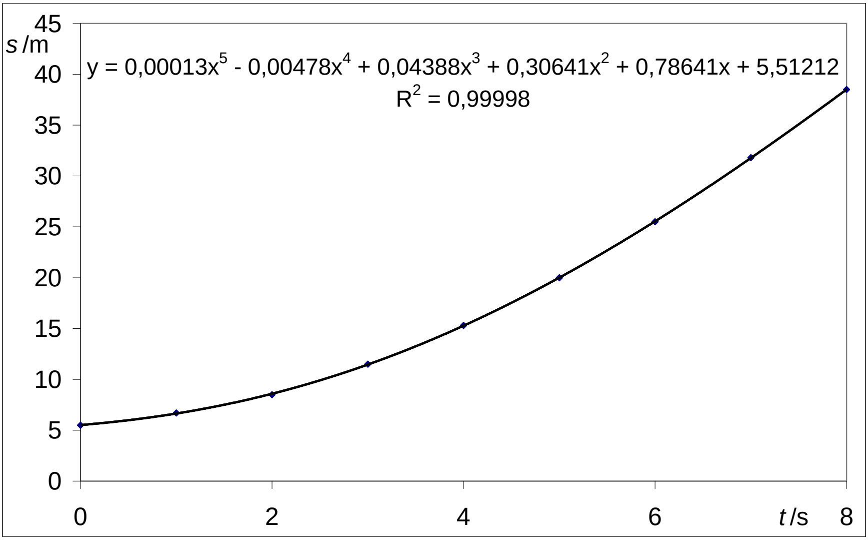
Obr. R3



Obr. R4

2. a) Polynomickou regresí 5. stupně vyjádříme dráhu jako funkci času ve tvaru

$$\{s\} = 0{,}00013\{t\}^5 - 0{,}00478\{t\}^4 + 0{,}04388\{t\}^3 + 0{,}30641\{t\}^2 + 0{,}78641t + 0{,}51212. \quad (1)$$



4 body

b) Dvojím derivováním funkce (1) dostaneme vztahy

$$\{v\} = 0{,}00065\{t\}^4 - 0{,}01912\{t\}^3 + 0{,}13164\{t\}^2 + 0{,}61282\{t\} + 0{,}78641, \quad (2)$$

$$\{a\} = 0{,}00260\{t\}^3 - 0{,}05736\{t\}^2 + 0{,}26328\{t\} + 0{,}61282. \quad (3)$$

které použijeme k doplnění tabulky a sestrojení grafů rychlosti a dráhy.

t /s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s /m	5,5	6,7	8,5	11,5	15,3	20	25,5	31,8	38,5
v /m.s^{-1}	0,7864	1,5124	2,3961	3,346	4,2867	5,1578	5,9149	6,529	6,98689
a /m.s^{-2}	0,6128	0,8213	0,9307	0,9566	0,9146	0,8202	0,6891	0,5369	0,37922

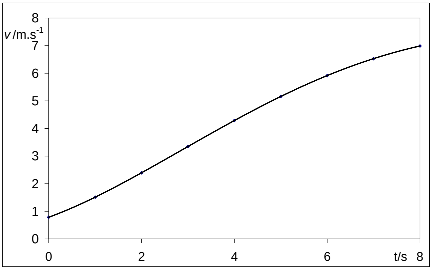
4 body

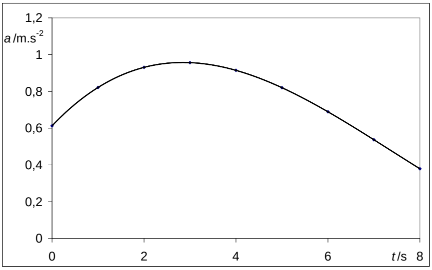
c) Na začátku měřeného intervalu měl trolejbus rychlost 0,79 m$\cdot$s^{-1} a zrychlení a = 0,61 m $\cdot$ s^{-2}, na konci intervalu měl rychlost 7,0 m $\cdot$ s^{-1} a zrychlení a = 0,38 m $\cdot$ s^{-2}. (Při zaokrohlení koeficientů ve vztahu (1) na jiný počet desetinných míst se mohou numerické hodnoty výsledků poněkud lišit.)

1 bod

d) Největší zrychlení $a = 0{,}96\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ měl trolejbus přibližně v čase $t = 3$ s od začátku měření.

1 bod





3. a) Podle stavové rovnice $n = n_1 + n_2 = \dfrac{p_1 V}{RT_1}$.
Celková hmotnost plynů $m = M_{\mathrm{m1}} n_1 + M_{\mathrm{m2}} n_2$.
Z těchto rovnic vyjádříme laátkové množství vodíku n_1 a kyslíku n_2:

$$n_1 = \frac{p_1 V M_{\mathrm{m2}} - mRT_1}{(M_{\mathrm{m2}} - M_{\mathrm{m1}})RT_1} = 4{,}91\ \mathrm{mol}, \quad n_2 = \frac{mRT_1 - p_1 V M_{\mathrm{m1}}}{(M_{\mathrm{m2}} - M_{\mathrm{m1}})RT_1} = 1{,}25\ \mathrm{mol}.$$

3 body

b) Při spalování vodíku na 1 mol kyslíku připadají 2 moly vodíku. Spálí se tedy jen $2n_2$ molů vodíku a $(n_1 - 2n_2)$ molů vodíku v nádobě zůstane. Při spálení $2n_2$ molů vodíku na vodní páru se uvolní teplo $Q = 2n_2 M_{\mathrm{m1}} H = 606$ kJ.

3 body

c) Během poklesu teploty na hodnotu $t_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$ část vodní páry zkondenzuje. Protože při této teplotě je tlak vodní páry roven tlaku atmosférickému a víme, že vzniklo $2n_2$ molů vody, bude hmotnost kondenzované vody

$$m_{\mathrm{v}} = \left(2n_2 - \frac{p_{\mathrm{a}} V}{RT_2}\right) \cdot M_{\mathrm{mv}} = \left(2n_2 - \frac{p_{\mathrm{a}} V}{RT_2}\right)(M_{\mathrm{m1}} + 0{,}5 M_{\mathrm{m2}}) = 15{,}6\ \mathrm{g}.$$

Objem tohoto množství kapalné vody je v porovnání s objemem nádoby zanedbatelný. Tlak p_2 v nádobě bude podle Daltonova zákona roven součtu tlaku vodní páry (což je tlak atmosférický) a tlaku zbylého vodíku, který určíme ze stavové rovnice. Tedy

$$p_2 = p_{\mathrm{a}} + \frac{(n_1 - 2n_2)RT_2}{V} = 2{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

4 body

4. a) Pro velikosti sil napínajících levý a pravý drát platí

$$F_1 + F_2 = m_0 g, \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{16}{9}.$$

Z rovnic plyne

$$F_1 = \frac{16}{25} m_0 g, \qquad F_2 = \frac{9}{25} m_0 g. \tag{1}$$

Dále je

$$\frac{f_1}{f_\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{F_1}{F_\mathrm{c}}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{25} m_0 g}{\frac{1}{2} m_0 g}} = \frac{4\sqrt{2}}{5},$$

tedy $f_1 = \frac{4\sqrt{2}}{5} f_\mathrm{c} = 299\ \mathrm{Hz}$, obdobně $f_2 = \frac{3\sqrt{2}}{5} f_\mathrm{c} = 224\ \mathrm{Hz}$.

Podle momentové věty platí $F_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) = F_2 \frac{l}{2}$.

Po dosazení z (1) a úpravě dostaneme $x_1 = \frac{(F_1 - F_2) l}{2F_1} = \frac{7}{32} l$.

4 body

b) Tyč bez zavěšeného závaží napíná každý z drátů silou o velikosti

$$F_\mathrm{c} = \frac{m_0 g}{2}.$$

Po zavěšení závaží je levý drát napínán silou o velikosti

$$F_\mathrm{e} = \frac{f_\mathrm{e}^2}{f_\mathrm{c}^2} F_\mathrm{c} = \frac{25}{16} \cdot \frac{m_0 g}{2} = \frac{25}{32} m_0 g, \tag{2}$$

pravý drát silou o velikosti

$$F_\mathrm{g} = \frac{f_\mathrm{g}^2}{f_\mathrm{c}^2} F_\mathrm{c} = \frac{9}{4} \cdot \frac{m_0 g}{2} = \frac{9}{8} m_0 g, \tag{3}$$

Velikost výslednice těchto sil je

$$F_\mathrm{e} + F_\mathrm{g} = \frac{25}{32} m_0 g + \frac{9}{8} m_0 g = \frac{61}{32} m_0 g.$$

Současně platí $F_\mathrm{e} + F_\mathrm{g} = (m_0 + m) g$. Z rovnosti obou výrazů dostaneme

$$m = \frac{29}{32} m_0. \tag{4}$$

Vektorová přímka výslednice tíhových sil protíná tyč v bodě T ve vzdálenosti

x_T od levého konce tyče. Poloha bodu T splňuje podmínku

$$F_\mathrm{e} x_T = F_\mathrm{g}(l - x_T),$$

z níž plyne $x_T = \dfrac{F_\mathrm{g}}{F_\mathrm{e} + F_\mathrm{g}} l$. Po dosazení z (2) a (3) dostaneme

$$x_T = \frac{36}{61} l. \tag{5}$$

Podle momentové věty vzhledem k ose procházející levým koncovým bodem tyče platí

$$(m_0 + m) g \cdot x_T = m_0 g \cdot \frac{l}{2} + m g \cdot x_2.$$

Po dosazení z (4), (5) dostaneme

$$\left(m_0 + \frac{29}{32} m_0\right) g \cdot \frac{36}{61} l = m_0 g \cdot \frac{l}{2} + \frac{29}{32} m_0 g \cdot x_2, \qquad x_2 = \frac{20}{29} l.$$

6 bodů

5. a) Polohu předmětu určíme pomocí zobrazovací rovnice pro čočku a vztahu pro příčné zvětšení:

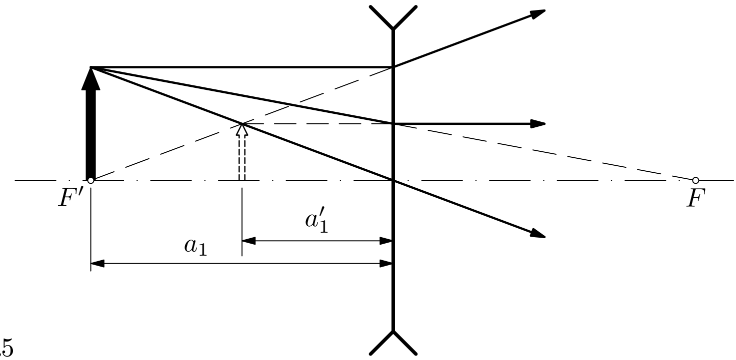
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f}, \qquad Z_1 = \frac{y'}{y} = -\frac{a_1'}{a_1}.$$

Úpravami dostaneme

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right) f, \qquad a_1' = (1 - Z_1) f.$$

Pro $Z_1 = 1/2$ vychází $a_1 = -f$, $a_1' = \dfrac{1}{2} f$. Vzhledem k tomu, že se jedná o rozptylku, tj. $f < 0$, bude $a_1 > 0$, $a_1' < 0$.

1 bod



Obr. R5

1 bod

b) Nejprve nakreslíme obrázek čočky se zrcadlem. Z obr. R6 je zřejmé, že zdánlivý obraz y' leží ve vzdálenosti $|a_1'| + d = -\dfrac{f}{2} + d$ od zrcadla. Ve stejné vzdálenosti od zrcadla a tedy ve vzdálenosti $a_2 = -\dfrac{f}{2} + 2d$ od rozptylky leží zdánlivý obraz y'' vytvořený zrcadlem. Z něj zdánlivě vycházejí odražené paprsky dopadající na rozptylku, a proto jej při druhém zobrazení rozptylkou chápeme jako předmět. Odražené paprsky procházejí čočkou zprava, proto zaměníme předmětový a obrazový poloprostor. Ze zobrazovací rovnice určíme polohu výsledného obrazu y''':

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a_2' = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = \frac{\left(2d - \dfrac{f}{2}\right) f}{2d - \dfrac{3}{2} f} < 0$$

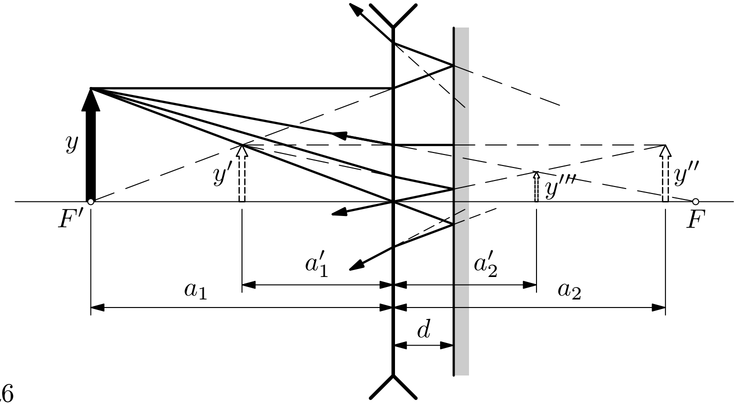
a příslušné zvětšení

$$Z_2 = \frac{y'''}{y''} = -\frac{a_2'}{a_2} = \frac{-f}{2d - \dfrac{3}{2} f} > 0.$$

Výsledné příčné zvětšení je

$$Z = Z_1 Z_2 = \frac{-f}{4d - 3f}.$$

3 body



Obr. R6

3 body

c) Jestliže $Z = \dfrac{-f}{4d-3f} = \dfrac{1}{4}$, pak $d = \dfrac{-f}{4}$, $a_2 = -f > 0$, $a'_2 = \dfrac{f}{2} < 0$.

Zrcadlo musíme umístit do vzdálenosti $\dfrac{|f|}{4}$ za rozptylku a výsledný obraz uvidíme ve vzdálenosti $\dfrac{|f|}{2}$ za rozptylkou.

2 body

7. a) Označme T_0 periodu, se kterou kmitá zdroj záření na daném astronomickém objektu a T periodu kmitů přicházejících k pozorovateli na Zemi. Z relativistického vztahu pro Dopplerův jev plyne

$$\frac{T}{T_0} = \frac{cT}{cT_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = z + 1 = k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Z toho

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}, \qquad v = c\frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

Číselně vychází $v = 0{,}18c = 5{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **3 body**

b) Průměr disku Galaxie by daný objekt prolétl za dobu

$$t = \frac{30 \cdot 3{,}08 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m}}{5{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 17{,}1 \cdot 10^{12}\ \mathrm{s} = 540\,000\ \text{roků},$$

což je doba dlouhá v porovnání s délkou lidského života, ale nepatrná v porovnání se stářím vesmíru.

1 bod

Poznámka: V naší Galaxii se s takto rychlými objekty nesetkáváme. Rychlostí větší než $10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se ale v důsledku kosmologického rozpínání od nás vzdalují velmi vzdálené objekty, např. kupy galaxií nebo kvasary.

c) Doby τ a τ_0 můžeme chápat jako periody nějakého periodického děje. I pro ně platí relativistický vztah pro Dopplerův jev, takže

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = z + 1, \qquad \tau_0 = \frac{\tau}{z+1}.$$

Číselně vychází $\tau_0 = 125$ h. **2 body**

d) Vztah mezi dobami τ_1 a τ_0 je dán dilatací času. Platí

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(z^2+2z)^2}{(z^2+2z+2)^2}} = \frac{2(z+1)}{z^2+2z+2},$$

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{(z+1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau(z^2+2z+2)}{2(z+1)^2}.$$

Číselně vychází $\tau_1 = 127$ h. **2 body**

e) Kinetická energie daného objektu je podle pozemského pozorovatele

$$E_\mathrm{k} = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = E_0\left(\frac{z^2+2z+2}{2(z+1)} - 1\right) = \frac{z^2}{2(z+1)}E_0,$$

kde m je hmotnost objektu, E jeho celková energie a E_0 energie klidová.
Číselně vychází $E_\mathrm{k} = 0{,}017 \cdot E_0$. **2 body**