Řešení úloh krajského kola 55. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1), J. Jírů (3) a P. Šedivý (2,4)

1. a) Při prvním přeneseníválečku platí kalorimetrická rovnice

$$5C(t_A - t_1) = C(t_2 - t_A) \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{5t_1 + t_2}{6},$$

kde t_A je nová rovnovážná teplota v první nádobě. Po přenesení válečku zpět do druhé nádoby a ustavení rovnováhy platí

$$C(t_B - t_A) = 8C(t_2 - t_B) \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{8t_2 + t_A}{9} = \frac{49t_2 + 5t_1}{54},$$

kde t_B je nová rovnovážná teplota ve druhé nádobě. Rozdíl teplot po prvním cyklu tedy bude

$$t_B - t_A = \frac{49t_2 + 5t_1}{54} - \frac{5t_1 + t_2}{6} = \frac{40}{54}(t_2 - t_1) = \frac{20}{27}(t_2 - t_1).$$

3 body

b) Rozdíl teplot po druhém cyklu bude $t_B - t_A = \left(\frac{20}{27}\right)^2 (t_2 - t_1)$

a po n-tém cyklu to bude $t_B - t_A = \left(\frac{20}{27}\right)^n (t_2 - t_1)$.

Budeme tedy řešit exponenciální rovnici

$$\frac{1}{20}(t_2 - t_1) = \left(\frac{20}{27}\right)^n (t_2 - t_1).$$

Jejím řešením je $n = \dfrac{\log 0{,}05}{\log \dfrac{20}{27}} = 9{,}98$. Aby rozdíl teplot klesl na $\frac{1}{20}$ původního teplotního rozdílu, musíme tedy přenesení válečku opakovat 10krát.

4 body

c) Budeme-li přenášení válečku opakovat dostatečně dlouho, teploty v nádobách se ustálí na stejné hodnotě. Situace bude stejná, jako kdybychom provedli přímou tepelnou výměnu mezi dvěma lázněmi s tepelnými kapacitami 5C a 9C. Kalorimetrická rovnice pak bude mít tvar

$$5C(t - t_1) = 9C(t_2 - t)$$

a její řešení bude $t = \dfrac{5t_1 + 9t_2}{14}$.

3 body

2. a) Označme M hmotnost původní kruhové desky, m hmotnost vyříznuté části, ϱ hustotu materiálu desky a h její tloušťku. Moment setrvačnosti mezikruží vzhledem k hraně břitu je

$$J = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 + (M-m)r^2 = \frac{1}{2}\pi\varrho h(R^4 - r^4) + \pi\varrho h(R^2 - r^2)r^2, \quad (1)$$

direkční moment mezikruží vzhledem k hraně břitu je

$$D = (M-m)gr = \pi\varrho hg(R^2 - r^2)r. \quad (2)$$

Malé kmity mezikruží mají periodu $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{D}}$. Po dosazení z (1) a (2) a úpravě dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 3r^2}{2rg}}. \quad (3)$$

5 bodů

b) Derivujeme odmocněnce ve vztahu (3):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{R^2 + 3r^2}{2rg}\right) = \frac{1}{2g}\,\frac{6r^2 - (R^2 + 3r^2)}{r^2} = \frac{3r^2 - R^2}{2gr^2}.$$

Derivace je rovna 0 pro $r = r_{\min} = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$. Pro $r > r_{\min}$ je derivace kladná, pro $r < r_{\min}$ je záporná. Pro $r = r_{\min}$ je tedy perioda kmitů minimální a má hodnotu

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + R^2}{2\dfrac{R}{\sqrt{3}}g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{g}}.$$

4 body

Tomu odpovídá minimální redukovaná délka

$$l^{\star}_{\min} = R\sqrt{3}.$$

1 bod

3. a) Napětí na třetím rezistoru je $U = \dfrac{R'}{R_c} U_e$, kde $R' = \dfrac{RR_1}{R + R_1}$ je odpor paralelně spojených rezistorů a

$$R_c = R' + R_1 = \frac{(2R + R_1)R_1}{R + R_1}$$

je celkový odpor soustavy. Elektrický příkon třetího rezistoru pak je

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{R'^2}{R_c^2 R} {U_e}^2 = \frac{R}{(2R + R_1)^2} {U_e}^2. \qquad (1)$$

Dosazením $R = 3R_1$ dostaneme hledaný příkon $P = \dfrac{3}{49} \dfrac{{U_e}^2}{R_1}$.

2 body

b) Na základě rovnice (1) platí

$$\frac{R}{(2R + R_1)^2} {U_e}^2 \geq \frac{1}{9} \frac{{U_e}^2}{R_1}.$$

Úpravami dostaneme kvadratickou nerovnici

$$4R^2 - 5R_1 R + R_1^2 \leq 0,$$

z níž pro nulové body plyne $R = \dfrac{5R_1 \pm \sqrt{25R_1^2 - 16R_1^2}}{8}$.

Nulové body jsou R_1 a $\dfrac{R_1}{4}$.

Uvedené nerovnici vyhovuje odpor $R \in \left\langle \dfrac{R_1}{4}, R_1 \right\rangle$.

2 body

c) Derivací závislosti (1) příkonu třetího rezistoru na jeho odporu dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{(2R + R_1)^2 - 4R(2R + R_1)}{(2R + R_1)^4} {U_e}^2 = \frac{R_1 - 2R}{(2R + R_1)^3} {U_e}^2.$$

Derivace je nulová pro $R = \dfrac{R_1}{2}$. Pro $R < \dfrac{R_1}{2}$ je kladná, pro $R > \dfrac{R_1}{2}$ je záporná. Funkce (1) tedy v bodě $R = \dfrac{R_1}{2}$ dosahuje maxima.

Dosazením dostaneme $P_{\max} = \dfrac{{U_e}^2}{8R_1}$.

3 body

d) Účinnost zapojení je

$$\eta = \frac{P}{P_\mathrm{c}} = \frac{\frac{U^2}{R}}{\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{R_\mathrm{c}}} = \frac{\frac{R}{(2R+R_1)^2}{U_\mathrm{e}}^2}{\frac{R+R_1}{(2R+R_1)R_1}{U_\mathrm{e}}^2} = \frac{R_1 R}{(2R+R_1)(R+R_1)} = \frac{R_1 R}{2R^2+3R_1 R+R_1^2}.$$

Derivací dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}R} = \frac{R_1(2R+R_1)(R+R_1) - R_1 R(4R+3R_1)}{(2R+R_1)^2(R+R_1)^2} = \frac{R_1(R_1^2-2R^2)}{(2R+R_1)^2(R+R_1)^2}.$$

Derivace je nulová pro $R = \frac{R_1}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}71 R_1$. Pro $R < \frac{R_1}{\sqrt{2}}$ je kladná, pro $R > \frac{R_1}{\sqrt{2}}$ je záporná. Účinnost obvodu tedy pro $R = \frac{R_1}{\sqrt{2}}$ dosahuje maxima. Dosazením dostaneme $\eta_\mathrm{max} = 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0{,}17$.

3 body

4. Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{1}$$

a ze zákona zachování celkové energie

$$m_0 c^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

4 body

a) Z (2) vyjádříme

$$\frac{M}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{3}$$

a dosadíme do (1): $$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) u,$$

$$u = \frac{v}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{4}{5}c}{1+\frac{3}{5}} = \frac{c}{2}. \tag{4}$$

3 body

b) Úpravou (3) a dosazením z (4) dostaneme

$$M = m_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{3}{5}}\right) \sqrt{\frac{3}{4}} = m_0 \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

3 body

Ve Feynmanových přednáškách z fyziky, odkud byla úloha převzata, se její řešení opírá o užití vztahu pro výpočet relativistické hmotnosti:

a) V laboratorní vztažné soustavě má částice, která je před srážkou v klidu, relativistickou hmotnost m_0. Částice, která je před srážkou v pohybu, má relativistickou hmotnost

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3} m_0.$$

Hmotný střed S dvojice částic dělí jejich spojnici v poměru 3 : 5 (obr. R1) a pohybuje se rychlostí

$$v_S = \frac{\frac{5}{3} m_0 \cdot \frac{4}{5} c + m_0 \cdot 0}{\frac{5}{3} m_0 + m_0} = \frac{c}{2}.$$

Protože částice tvoří izolovanou soustavu, bude se touto rychlostí po srážce pohybovat i spojená částice. **(5 bodů)**

b) Přejděme nyní do vztažné soustavy spojené s hmotným středem. V ní se obě částice před srážkou pohybují proti sobě stejně velkou rychlostí $\frac{c}{2}$ (obr. R2), mají relativistickou hmotnost

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

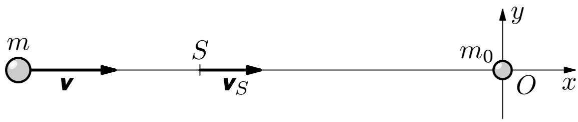
a celková energie částic v této vztažné soustavě je

$$E = 2m_1 c^2 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0 c^2.$$

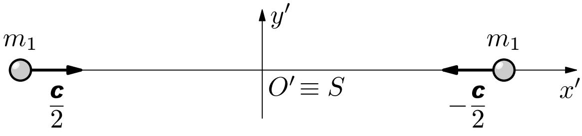
Při srážce se částice zastaví, ale velikost celkové energie částic se nezmění a je rovna klidové energii spojené částice $E = Mc^2$. Porovnáním vztahů dostaneme

$$M = m_0 \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

(5 bodů)



Obr. R1



Obr. R2