Řešení úloh krajského kola 55. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4) a Dalibor Blažek SR (3)

1. Bude-li délka l_2 příliš krátká, bude vztlaková síla menší, než tíhová síla a tyčinka klesne ke dnu nádoby. Proto

$$(l_1\varrho_1 + l_2\varrho_2)Sg \leq (l_1 + l_2)\varrho_0 Sg \quad \Rightarrow \quad l_2 \geq \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_0 - \varrho_2} l_1,$$

kde S je obsah příčného průřezu tyčinky. Minimální délka tyčinky l_2 musí splňovat podmínku

$$l_2 = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_0 - \varrho_2} l_1 = \frac{0{,}80\varrho_0}{0{,}40\varrho_0} l_1 = 10 \text{ cm}.$$

3 body

Aby tyčinka zůstávala ve svislé poloze, musí jít o stálou rovnovážnou polohu. Působiště vztlakové síly, které je uprostřed ponořené části tyčinky, se musí nacházet výše než v těžišti celé tyčinky, kde je působiště tíhové síly. Jinak by se tyčinka nacházela ve volné nebo vratké rovnovážné poloze a již při malém vychýlení by se položila na hladinu kapaliny.

Pro vzdálenost těžiště tyčinky od jejího spodního konce platí

$$y_T = \frac{l_1\varrho_1 \dfrac{l_1}{2} + l_2\varrho_2 \left(l_1 + \dfrac{l_2}{2}\right)}{l_1\varrho_1 + l_2\varrho_2}. \tag{1}$$

3 body

V mezním případě, kdy už je poloha tyčinky volná, se těžiště nachází uprostřed ponořené části tyčinky a platí

$$2y_T S\varrho_0 g = (l_1\varrho_1 + l_2\varrho_2)Sg.$$

Dosazením za y_T z (1) a úpravou dostaneme

$$\varrho_0 \left(l_1^2\varrho_1 + 2l_1l_2\varrho_2 + l_2^2\varrho_2\right) = (l_1\varrho_1 + l_2\varrho_2)^2.$$

Dosazením za ϱ_1, ϱ_2 a l_1 ze zadání a další úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici pro číselnou hodnotu délky l_2:

$$45 + 6\{l_2\} + 0{,}6\{l_2\}^2 = 81 + 10{,}8\{l_2\} + 0{,}36\{l_2\}^2,$$

$$0{,}24\{l_2\}^2 - 4{,}8\{l_2\} - 36 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen $\{l_2\} = 25{,}8$. Má-li tyčinka plovat ve svislé poloze, musí být délka části tyčinky s menší hustotou v intervalu $l_2 \in \langle 10{,}0 \text{ cm}, 25{,}8 \text{ cm})$.

4 body

2. a) Protože větví LM proud neprochází a všechny odpory mají stejnou hodnotu R, je celkový odpor obvodu připojeného ke zdroji

$$R_\mathrm{c} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R.$$

Celkový proud zdroje $I = \dfrac{U_\mathrm{e}}{\frac{2}{3}R + r}$ se dělí do větví KLN a KMN v poměru 1 : 2. Na odporu R_2 a tedy i na kondenzátoru je napětí

$$U_{LN} = R \cdot \frac{I}{3} = \frac{U_\mathrm{e}R}{2R + 3r}.$$

Náboj na kondenzátoru je

$$Q = CU_{LN} = \frac{CU_\mathrm{e}R}{2R + 3r} = 52\ \mu\mathrm{C}.$$

5 bodů

b) Nahradíme-li rezistor R_4 rezistorem o odporu $2R$, výsledek se nezmění.

Nahradíme-li rezistor R_3, je celkový odpor R, celkový proud je $I = \dfrac{U_\mathrm{e}}{R + r}$, proud mezi body L a N je $\dfrac{I}{2}$ a náboj na kondenzátoru je

$$Q = CR\frac{I}{2} = \frac{CU_\mathrm{e}R}{2(R + r)} = 55\ \mu\mathrm{C}.$$

Nahradíme-li rezistor R_2, je celkový odpor $\dfrac{3R \cdot R}{3R + R} = \dfrac{3}{4}R$, celkový proud je $I = \dfrac{U_\mathrm{e}}{\frac{3}{4}R + r}$, proud mezi body L a N je $\dfrac{I}{4}$ a náboj na kondenzátoru je

$$Q = C \cdot 2R\frac{I}{4} = \frac{CU_\mathrm{e}R}{\frac{3}{2}R + 2r} = 71\ \mu\mathrm{C}.$$

Nahradíme-li rezistor R_1, je celkový odpor $\dfrac{3R \cdot R}{3R + R} = \dfrac{3}{4}R$, celkový proud je $I = \dfrac{U_\mathrm{e}}{\frac{3}{4}R + r}$, proud mezi body L a N je $\dfrac{I}{4}$ a náboj na kondenzátoru je

$$Q = CR\frac{I}{4} = \frac{CU_\mathrm{e}R}{3R + 4r} = 35\ \mu\mathrm{C}.$$

5 bodů

3. a) Na počátku je teplota vzduchu pod hrncom T_0 a tlak p_0. Postupně se vzduch pod hrncom ohřívá a tlak se izochoricky zvětšuje. Bublinky začnou unikat, když se tlaková síla způsobená přetlakem vzduchu uvnitř vyrovná s tíhou hrnce. Platí

$$(p_1 - p_0)S = mg, \qquad \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}.$$

Z toho $T_1 = T_0 \left(1 + \dfrac{mg}{Sp_0}\right) = 295{,}4\ \mathrm{K}, \qquad t_1 = 22{,}3\ {}^\circ\mathrm{C}.$

2 body

b) Na počátku je hmotnost m_0 vzduchu pod hrncem dána stavovou rovnicí

$$m_0 = \frac{M_\mathrm{m} p_0 S h}{R T_0}.$$

Po zahřátí na teplotu hrnce $T_\mathrm{m} > T_1$ je tlak pod hrncem p_1 a hmotnost vzduchu je

$$m_\mathrm{m} = \frac{M_\mathrm{m}\left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right) S h}{R T_\mathrm{m}}.$$

Relativní změna hmotnosti vzduchu pod hrncem je

$$\delta m = \frac{m_\mathrm{m} - m_0}{m_0} = \frac{T_0}{T_\mathrm{m}}\left(1 + \frac{mg}{Sp_0}\right) - 1 = -5{,}7\ \%.$$

4 body

c) Při ochlazování probíhá děj izochorický, platí $\dfrac{p_0 + \dfrac{mg}{S}}{T_\mathrm{m}} = \dfrac{p_0}{T_2}$. Z toho

$$T_2 = \frac{T_\mathrm{m}}{1 + \dfrac{mg}{p_0 S}} = 310{,}7\ \mathrm{K}, \qquad t_2 = 37{,}6\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

d) Při dalším poklesu teploty na T_0 bez nasávání vzduchu z okolí je

$$\frac{p_0 + \dfrac{mg}{S}}{T_\mathrm{m}} = \frac{p}{T_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{T_0}{T_\mathrm{m}}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right).$$

Přítlačná síla má velikost

$$F = (p_0 - p)S + mg = \left(1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{m}}\right)(mg + p_0 S) = 98\ \mathrm{N}.$$

2 body

Poznámka: Uvedené úvahy a výpočty mají význam jen v případě, že platí $T_1 < T_\mathrm{m}$. Kdyby by tato nerovnost neplatila, vzduch by zpod hrnce neunikal a hrnec by se ke stolu nepřisál.

4. a) Kruhová deska o poloměru R by měla hmotnost $2m$ a moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející středem $J = \frac{1}{2}(2m)R^2$. Půlkruhová deska má vzhledem k ose jdoucí bodem O_1 poloviční moment setrvačnosti

$$J_1 = \frac{1}{2}mR^2 = 0{,}25\ \mathrm{kg\cdot m^2}.$$

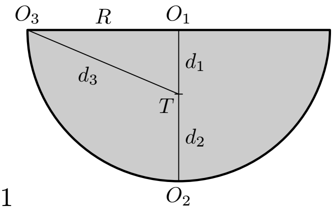
Momenty setrvačnosti J_0,J_2 a J_3 vzhledem k osám procházejícím těžištěm a body O_2, O_3 určíme užitím Steinerovy věty. Platí

$$J_0 = J_1 - md_1^2 = mR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) = 0{,}160\ \mathrm{kg\cdot m^2},$$

$$J_2 = J_0 + md_2^2 = J_1 - md_1^2 + m(R-d_1)^2 = J_1 + mR^2 - 2mRd_1 = \\ = mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right) = 0{,}326\ \mathrm{kg\cdot m^2},$$

$$J_3 = J_0 + md_3^2 = J_1 - md_1^2 + m(R^2 + d_1^2) = J_1 + mR^2 = \\ = \frac{3}{2}mR^2 = 0{,}75\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

5 bodů



Obr. R1

b) Periodu kmitů fyzického kyvadla s malou amplitudou je $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$. Pak

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2}{mg\frac{4}{3\pi}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi R}{8g}} = 6{,}82\sqrt{\frac{R}{g}} = 1{,}54\ \mathrm{s},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)mR^2}{mg\frac{3\pi - 4}{3\pi}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{(9\pi - 16)R}{2(3\pi - 4)g}} = 6{,}68\sqrt{\frac{R}{g}} = 1{,}51\ \mathrm{s},$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mR^2}{mgR\sqrt{1 + \frac{16}{9\pi^2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{9\pi R}{2g\sqrt{9\pi^2 + 16}}} = 7{,}38\sqrt{\frac{R}{g}} = 1{,}67\ \mathrm{s}.$$

5 bodů