Řešení úloh 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3), J. Jírů (4, 5), I. Volf (7), J. Jírů a P. Šedivý (6)

1. a) Tlaková síla na dno nádoby závisí jen na výšce hladiny nade dnem a na plošném obsahu dna. Při prvním přidání vody se tedy síla na dno zvýší o $F_0 = h\varrho g S_1 = V_0\varrho g$, při druhém přidání vody o $2F_0 = 2h\varrho g S_1$, při třetím přidání vody opět o $F_0 = h\varrho g S_1 = V_0\varrho g$, kde h je výška hladiny po prvním nalití vody, kdy se hladina bude nacházet v dolní širší části nádoby. (Dokažte sami.) Polohy hladin jsou znázorněny na obr. R1.

Porovnáním objemů při prvním a třetím přidání $V_0 = hS_1$, $\frac{3}{8}V_0 = hS_2$ dostaneme

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{3}. \tag{1}$$

2 body

b) Celkový objem nádoby je

$$L_1S_1 + L_2S_2 = \frac{19}{8}V_0 = \frac{19}{8}S_1h. \tag{2}$$

Výška nádoby

$$L_1 + L_2 = 4h. \tag{3}$$

Dosazením z (1) a (3) do (2) dostaneme

$$S_1L_1 + \frac{3}{8}S_1(4h - L_1) = \frac{19}{8}S_1h,$$

$$L_1 = \frac{7}{5}h, \qquad L_2 = \frac{13}{5}h, \qquad \frac{L_1}{L_2} = \frac{7}{13}.$$

4 body

c) Objem užší části nádoby je

$$L_2S_2 = \frac{13}{5}h \cdot \frac{3}{8}S_1 = \frac{39}{40}S_1h = \frac{39}{40}V_0.$$

Po prvním nalití vody do převrácené nádoby tedy hladina vystoupí až do širší části (obr. R2) do výšky

$$h_1 = L_2 + \frac{1}{40}h = \frac{105}{40}h = \frac{21}{8}h.$$

K udržení záklopky bude potřeba působit nejméně silou

$$F_1 = F_0 + S_2h_1\varrho g = F_0 + \frac{3}{8}S_1 \cdot \frac{21}{8}h\varrho g = \left(1 + \frac{63}{64}\right)F_0 \doteq 1{,}98F_0.$$

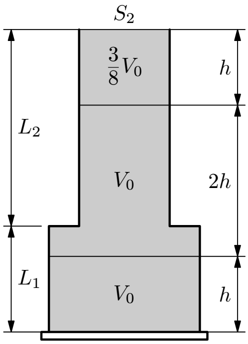
Po druhém nalití vody vystoupí hladina o h do výšky $h_2 = \frac{29}{8}h$ a potřebná síla se zvětší na

$$F_2 = F_0 + S_2 h_2 \varrho g = F_0 + \frac{3}{8}S_1 \cdot \frac{29}{8}h\varrho g = \left(1 + \frac{87}{64}\right) F_0 \doteq 2{,}36F_0.$$

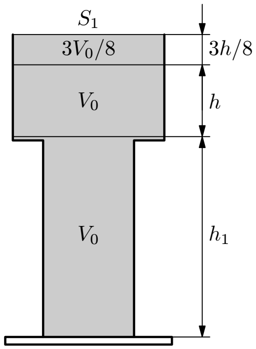
Po naplnění nádoby po okraj bude nutno působit alespoň silou

$$F_3 = F_0 + S_2 \cdot 4h\varrho g = F_0 + \frac{3}{8}S_1 \cdot 4h\varrho g = \left(1 + \frac{3}{2}\right) F_0 = 2{,}5F_0.$$

4 body



Obr. R1



Obr. R2

2. a) Na lať působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, reakce vodorovné roviny $\boldsymbol{R}_1$ a reakce zdi $\boldsymbol{R}_2$. Z podmínek rovnováhy plyne, že jejich vektorové přímky se protínají v jediném bodě P (obr. R3). Reakce $\boldsymbol{R}_2$ je kolmá k lati, neboť mezi zdí a latí nepůsobí tření. Sílu $\boldsymbol{F}$, kterou působí dolní konec latě na vodorovnou rovinu, určíme ze zákona akce a reakce: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{R}_1$. Velikost reakce $\boldsymbol{R}_2$ určíme užitím momentové věty vzhledem k dolnímu konci latě:

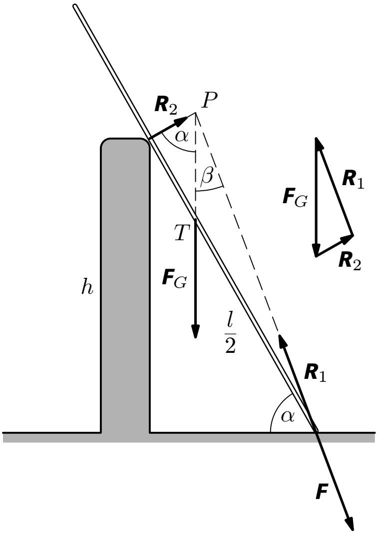
$$R_2 \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mg \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha \quad \rightarrow \quad R_2 = mg\frac{l}{2h}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Velikosti horizontální a vertikální složky reakce $\boldsymbol{R}_1$ a také síly $\boldsymbol{F}$ jsou

$$R_{x1} = F_x = R_2\sin\alpha = mg\frac{l}{2h}\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$R_{y1} = F_y = mg - R_2\cos\alpha = mg\left(1 - \frac{l}{2h}\sin\alpha\cos^2\alpha\right).$$

4 body



Obr. R3

Síla $\boldsymbol{F}$ má velikost $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ a pro její odchylku β od svislého směru platí

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{\dfrac{l}{2h}\sin^2\alpha\cos\alpha}{1 - \dfrac{l}{2h}\sin\alpha\cos^2\alpha}.$$

Pro zadané hodnoty vychází $F_x = 36{,}8$ N, $F_y = 96{,}5$ N, $F = 103$ N, $\operatorname{tg} \beta = 0{,}381$, $\beta = 20{,}9°$. **3 body**

b) Aby lať neklouzala po vodorovné rovině, musí vodorovná složka reakce $\boldsymbol{R}_1$, tj. třecí síla, a normálová složka síly $\boldsymbol{F}$ musí splňovat vztah $R_1x \leq fF_y$. Z toho

$$f \geq \frac{R_{x1}}{F_y} = \frac{F_x}{F_y} = \operatorname{tg} \beta = 0{,}381.$$

3 body

3. a) Vzdálenost mezi automobily bude minimální v okamžiku, kdy se budou pohybovat stejnou rychlostí:

$$v_2 = v_1 - at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_1 - v_2}{a}.$$

Osobní automobil urazí za dobu t vzdálenost $l_1 = v_1 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a}$.

Nákladní automobil urazí za stejnou dobu vzdálenost $l_2 = v_2 t = \frac{v_2(v_1 - v_2)}{a}$.

3 body

Nejmenší vzdálenost mezi vozidly pak bude

$$l_{\mathrm{min}} = L + l_2 - l_1 = L + \frac{v_2(v_1 - v_2)}{a} - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a} = L - \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} = 10 \text{ m}.$$

b) Pro rychlost $v_{1\mathrm{m}}$ platí

$$l_{\mathrm{min}} = L - \frac{(v_{1\mathrm{m}} - v_2)^2}{2a} = 0,$$

$$v_{1\mathrm{m}} = v_2 + \sqrt{2aL} = 23{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 85 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

2 body

c) Rychlosti aut budou stejné za dobu t_1:

$$v_2 - \frac{a}{2}t_1 = v_1 - at_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2(v_1 - v_2)}{a}.$$

Osobní automobil urazí za dobu t_1 vzdálenost

$$l_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{2v_1(v_1 - v_2)}{a} - \frac{2(v_1 - v_2)^2}{a} = \frac{2v_2(v_1 - v_2)}{a}.$$

Nákladní automobil urazí vzdálenost

$$l_2 = v_2 t_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{2v_2(v_1 - v_2)}{a} - \frac{(v_1 - v_2)^2}{a} = \frac{4v_1 v_2 - v_1^2 - 3v_2^2}{a}.$$

Nejmenší vzdálenost mezi vozidly pak bude

$$l_{\mathrm{min}} = L + l_2 - l_1 = L - \frac{(v_1 - v_2)^2}{a} = 5{,}0 \text{ m}.$$

3 body

Nemá-li dojít ke srážce, musí platit

$$l_{\mathrm{min}} = L - \frac{(v_{1\mathrm{m}} - v_2)^2}{a} = 0,$$

$$v_{1\mathrm{m}} = v_2 + \sqrt{aL} = 21{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 76 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

2 body

Alternativní řešení:

a) Uvažujme soustavu pevně spojenou s nákladním automobilem. Pak se osobní automobil pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem s počáteční rychlostí o velikosti $v_1' = v_1 - v_2$. Osobní automobil se vzhledem k nákladnímu automobilu zastaví na dráze

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{v_1'^2}{a^2} = \frac{v_1'^2}{2a}.$$

Konečná vzdálenost mezi automobily pak je

$$l_{\mathrm{min}} = L - s = L - \frac{v_1'^2}{2a} = L - \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}.$$

b) V soustavě pevně spojené s nákladním automobilem osobní automobil zastaví rovnoměrně zpomaleným pohybem na dráze

$$L = \frac{v_{1\mathrm{m}}'^2}{2a} = \frac{(v_{1\mathrm{m}} - v_2)^2}{2a}.$$

Z rovnice plyne $v_{1\mathrm{m}} = v_2 + \sqrt{2aL}$.

c) V soustavě pevně spojené s nákladním automobilem se osobní automobil přibližuje se zrychlením o velikosti $a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$. K vyřešení úloh a), b) stačí předchozí zrychlení nahradit polovičním:

$$l_{\mathrm{min}} = L - \frac{(v_1 - v_2)^2}{a}, \qquad v_{1\mathrm{m}} = v_2 + \sqrt{aL}.$$

4. a) Označme a velikost zrychlení kuličky vzhledem k vagónu a v velikost konečné rychlosti kuličky vzhledem k vagónu před nárazem na zadní stěnu. Pak z rovnic

$$v = at, \quad l = \frac{1}{2}at^2$$

plyne

$$v = \frac{2l}{t}. \tag{1}$$

Označme m hmotnost kuličky, pak setrvačná síla o velikosti $F_\mathrm{s} = ma_0$ působící na kuličku vykonala práci

$$W = F_\mathrm{s}l = ma_0l,$$

čímž kulička získala vzhledem k vagónu kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2.$$

Z rovnosti $W = E_\mathrm{k}$ a z rovnice (1) plyne

$$a_0 = \frac{7v^2}{10l} = \frac{14l}{5t^2} = 0{,}350\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

4 body

b) Dráha vagónu během pohybu kuličky ve vagónu je

$$s = \frac{1}{2}a_0t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{14l}{5t^2}\cdot t^2 = \frac{7}{5}l = 25{,}2\ \mathrm{m}.$$

2 body

c) Bezprostředně po nárazu je velikost rychlosti kuličky vzhledem k zemi rovna velikosti rychlosti vagónu

$$v_2 = a_0t = \frac{14l}{5t^2}\cdot t = \frac{14l}{5t} = 4{,}20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Bezprostředně před nárazem je velikost rychlosti kuličky vzhledem k zemi

$$v_1 = v_2 - v = \frac{14l}{5t} - \frac{2l}{t} = \frac{4l}{5t} = 1{,}20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

5. a) Doba ohřevu je $\tau_0 = \dfrac{mc(t_\mathrm{v} - t_0)}{P} = \dfrac{1{,}00 \cdot 4\,200 \cdot 80}{2\,000} = 168\ \mathrm{s}.$

1 bod

b) Doba ohřevu v první fázi je

$$\tau_1 = \frac{m_1 c(t_1 - t_0)}{P} = \frac{0{,}60 \cdot 4\,200 \cdot 50}{2\,000} = 63\ \mathrm{s}.$$

Po dolití studené vody klesne teplota vody v konvici na hodnotu t_2, kterou určíme z kalorimetrické rovnice:

$$m_1 c(t_1 - t_2) = m_2 c(t_2 - t_0),$$

$$t_2 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_0}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}60 \cdot 70 + 0{,}40 \cdot 20}{0{,}60 + 0{,}40} = 50\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

Konečný čas ohřevu je $\tau_0 = 168$ s, neboť jsme celkově se stejným tepelným výkonem uvedli do varu vodu o stejné hmotnosti jako v případě a).

2 body

c) Doba ohřevu v první fázi je

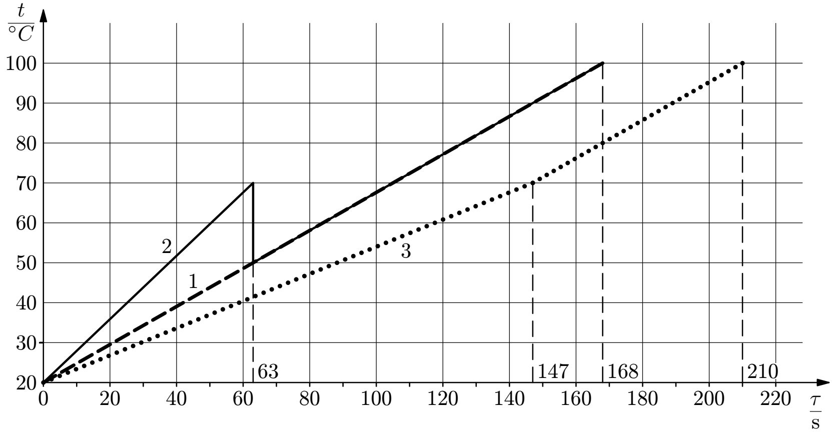
$$\tau_3 = \frac{m_2 c(t_1 - t_0)}{P} = \frac{1{,}40 \cdot 4\,200 \cdot 50}{2\,000} = 147\ \mathrm{s},$$

ve druhé fázi

$$\tau_4 = \frac{mc(t_\mathrm{v} - t_1)}{P} = \frac{1{,}00 \cdot 4\,200 \cdot 30}{2\,000} = 63\ \mathrm{s}$$

Celková doba ohřevu je $\tau_3 + \tau_4 = 210$ s.

2 body

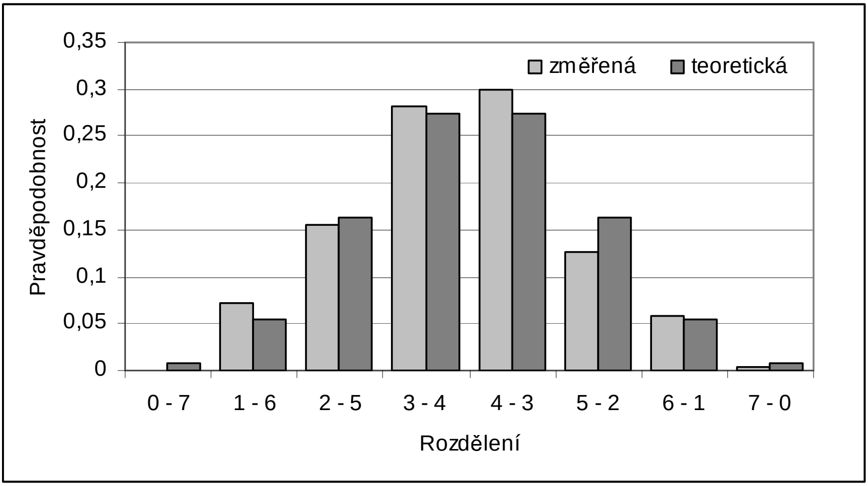


5 bodů

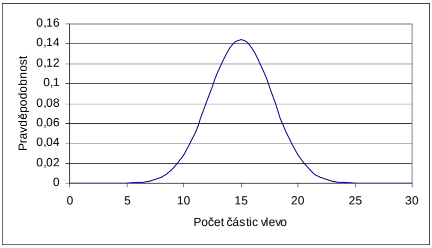
6. a) Možné výsledky po provedení 220 pokusů:

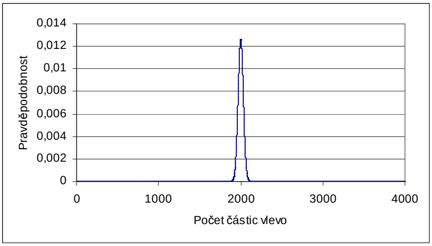
$N_l - N_p$	Změřený počet stavů	Změřená pravděpodobnost	Teoretická pravděpodobnost	
	Čárky – počet	Desetinné číslo (3 platné číslice)	Zlomek	Desetinné číslo (3 platné číslice)
0 – 7	0	0,000	$\frac{1}{128}$	0,007 81
1 – 6	𝍸 𝍸 𝍸 / 16	0,072 7	$\frac{7}{128}$	0,054 7
2 – 5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //// 34	0,155	$\frac{21}{128}$	0,164
3 – 4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 // 62	0,282	$\frac{35}{128}$	0,273
4 – 3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 / 66	0,300	$\frac{35}{128}$	0,273
5 – 2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /// 28	0,127	$\frac{21}{128}$	0,164
6 – 1	𝍸 𝍸 /// 13	0,059 1	$\frac{7}{128}$	0,054 7
7 – 0	/ 1	0,004 55	$\frac{1}{128}$	0,007 81
Součet	220	1,00	$\frac{128}{128} = 1$	1,00

b) Graf rozdělení pro $N = 7$:



c) Grafy rozdělení pro $N = 30$ a pro $N = 4\,000$:





Závěr: Pro malé soubory částic jsou nerovnoměrnosti v jejich rozdělení běžné. S rostoucím počtem částic roste pravděpodobnost přibližně stejného počtu částic v obou polovinách nádoby. Pro obrovské soubory částic (řádově 10^{23}) jsou počty prakticky stejné.

7. a) Délka sjezdové tratě je

$$s = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Ve směru pohybu působí na lyžaře pohybová složka tíhové síly o velikosti $F = mg\sin\alpha$. Kdyby nepůsobily odporové síly, konal by lyžař rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = g\sin\alpha.$$

Ze zákona dráhy

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{vt}{2} = \frac{v^2}{2a}$$

odvodíme

$$v^2 = 2as = 2 \cdot g\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = 2gh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Ke stejnému výsledku jsme mohli dojít užitím zákona zachování mechanické energie. Potenciální energie lyžaře na startu by bez přítomnosti odporových sil byla stejná jako kinetická energie v cíli:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Dobu pohybu lyžaře po trase určíme ze vztahu $s = \frac{1}{2}at^2$.

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}}.$$

Číselně vychází $a = 2{,}95\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $v = 111\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 400\ \mathrm{km/h}$, $t = 38\ \mathrm{s}$, což jsou ovšem nereálné hodnoty. **4 body**

b) Třecí síla má velikost $F_\mathrm{t} = mgf\cos\alpha$. Kdyby se jako odporová síla uplatnila jen třecí síla, pohyboval by se lyžař se zrychlením

$$a_1 = \frac{F - F_\mathrm{t}}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

dosáhl by rychlosti

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s} = \sqrt{2\cdot g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot\frac{h}{\sin\alpha}}$$

a do cíle by dorazil za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha}}.$$

Číselně vychází $a_1 = 2{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $v_1 = 98\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 350\ \mathrm{km/h}$, $t_1 = 43\ \mathrm{s}$, což jsou ovšem opět nereálné hodnoty. Tření nepřispívá k vysvětlení pohybu lyžaře podstatným způsobem. **3 body**

c) Ve skutečnosti po celou dobu působí na lyžaře také aerodynamická odporová síla o velikosti $F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$, takže pohybová rovnice má tvar

$$ma = F - F_\mathrm{t} - F_\mathrm{o} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{1}{2}CS\varrho v^2.$$

Nás nezajímá nárůst rychlosti po startu, ale ustálený stav, při němž bude

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{1}{2m}CS\varrho v^2 = 0.$$

Pak

$$v = v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\varrho}}.$$

Číselně vychází $v_\mathrm{m} = 24{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 88\ \mathrm{km/h}$, což je reálné. Pokud by projel celou trať touto rychlostí, dosáhl by času $t_2 = \dfrac{s}{v_\mathrm{m}} \doteq 86\ \mathrm{s}$. Vzhledem k pomalejšímu rozjíždění bude celková doba větší, odhadem asi 90 s.

3 body