Řešení úloh krajského kola 55. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2) a J. Thomas (3, 4)

1. a) Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

vyloučením času získáme rovnici

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Položením $x = L$, $y = 0$ dostaneme $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{gL}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$. Užitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

dostaneme

$$L = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \qquad \sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}. \tag{3}$$

Číselně vychází $\sin 2\alpha = 0{,}72073$, což vede k dvěma řešením $\alpha_1 = 23°$, $\alpha_2 = 67°$. **4 body**

b) Užitím rovnice (1) a položením $x = L$, $t = T$ dostaneme

$$T = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{\frac{v_0^2}{g} 2\sin\alpha\cos\alpha}{v_0\cos\alpha} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Úhlům α_1, α_2 odpovídají doby letu $T_1 = 2{,}8$ s, $T_2 = 6{,}6$ s.

2 body

c) Maximální výšku získáme dosazením $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $y = H$ do rovnice (2):

$$H = v_0 \frac{T}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Číselné dosazení opět vede na dvě řešení $H_1 = 9{,}6$ m, $H_2 = 53$ m.

2 body

d) Položením $\alpha = \alpha' = 45°$ v rovnici (3) dostaneme

$$L' = \frac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g} = 125 \text{ m}.$$

2 body

2. a) Z rovnosti kinetických energií $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$ dostaneme

$$m_1 = m_2\frac{v_2^2}{v_1^2} = 45 \text{ t}. \tag{1}$$

2 body

b) Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ dostaneme

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Dosazením vztahu (1) dostaneme

$$v = \frac{m_2\frac{v_2^2}{v_1^2}\cdot v_1 + m_2v_2}{m_2\frac{v_2^2}{v_1^2} + m_2} = \frac{v_1 + v_2}{v_1^2 + v_2^2}v_1v_2 = 3{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \tag{2}$$

3 body

c) Poměr kinetických energií vagónů po srážce a před srážkou je

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{2\cdot\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2m_2v_2^2}.$$

Užitím vztahů (1) a (2) dostaneme

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{\left(m_2\frac{v_2^2}{v_1^2} + m_2\right)\frac{(v_1 + v_2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2}v_1^2v_2^2}{2m_2v_2^2} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{25}{26} = 0{,}96.$$

5 bodů

3. a) Předpokládejme, že tíhová síla působící na umyvadlo je větší, než síla vztlaková, proto umyvadlo zůstává ležet na dně i po napuštění objemu vody. o objemu V_1. Volná plocha dna vany je

$$S = ab - \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = 0{,}43\mathrm{m}^2.$$

Voda bude sahat do výšky $h_1 = \dfrac{V_1}{S} = \dfrac{0{,}015}{0{,}43}\ \mathrm{m} = 3{,}5\ \mathrm{cm}.$

Nyní zjistíme, jestli umyvadlo s prádlem zůstane po přilití vody na dně vany. Porovnáme velikost tíhové síly $F_G = mg = 49\ \mathrm{N}$ a vztlakové síly

$$F_{\mathrm{vz}} = \frac{\pi d_1^2}{4} h_1 \varrho g = 43\ \mathrm{N} < F_G.$$

Umyvadlo tedy zůstane ležet na dně vany a náš předpoklad byl oprávněný.

4 body

b) Po přelití vody o objemu V_2 z kbelíku do vany bude umyvadlo s prádlem plovat na hladině, jak se přesvědčíme výpočtem. Označme hloubku ponoru umyvadla y. Podle Archimedova zákona platí:

$$mg = \frac{\pi d_1^2}{4} y \varrho g \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4m}{\pi d_1^2 \varrho} = 0{,}040\ \mathrm{m} = 4{,}0\ \mathrm{cm}.$$

Objem ponořené části umyvadla je $V_3 = \dfrac{\pi d_1^2}{4} y = \dfrac{m}{\varrho} = 0{,}005\,0\ m^3 = 5{,}0\ l.$

Voda ve vaně sahá do výšky

$$h_2 = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{ab} = \frac{0{,}032}{0{,}60}\ \mathrm{m} = 0{,}053\mathrm{m} = 5{,}3\ \mathrm{cm}.$$

Protože je $h_2 > y$, bude umyvadlo s prádlem plovat na hladině.

5 bodů

c) Do vany můžeme ještě připustit vodu o objemu

$$V_4 = ab(c - h_2) = 0{,}028\ \mathrm{m}^3 = 28\ l.$$

1 bod

4. a) Na 2. úseku působí proti pohybu sáňkaře třecí síla o velikosti $F_{\mathrm{t}} = fmg\cos\alpha$. V krajním případě bude rychlost sáňkaře na konci druhého úseku nulová. Podle ZZE se úbytek potenciální energie tíhové spotřebuje na práci při překonání třecí síly na druhém úseku, proto:

$$mg \cdot \frac{2}{3} l \sin\alpha = f_{\max} mg \cos\alpha \cdot \frac{1}{3} l \quad \Rightarrow \quad f_{\max} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Číselně vychází $f_{\max} = 0{,}54$. **2 body**

b) Na prvním i na třetím úseku se sáňkař pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením o velikosti $a_1 = g\sin\alpha$ po dobu $t_1 = \sqrt{\dfrac{2\cdot\dfrac{l}{3}}{a_1}} = \sqrt{\dfrac{2l}{3g\sin\alpha}}$.
Na druhém úseku se pohybuje rovnoměrně zpomaleně se zrychlením o velikosti

$$a_2 = g(f_{\max}\cos\alpha - \sin\alpha) = g(2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha) = g\sin\alpha = a_1,$$

proto průjezd druhým úsekem bude trvat stejnou dobu jako průjezd prvním i třetím úsekem. Celková doba jízdy sáňkaře tedy bude

$$t = 3t_1 = 3\sqrt{\frac{2l}{3g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{6l}{g\sin\alpha}}.$$

Číselně vychází $t = 11{,}9$ s. **3 body**

c) Bude-li součinitel smykového tření na druhém úseku $f = \dfrac{f_{\max}}{2} = \mathrm{tg}\,\alpha$, bude mít zrychlení sáňkaře na druhém úseku velikost

$$a_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha) = g(\sin\alpha - \sin\alpha) = 0;$$

sáňkař se bude pohybovat rovnoměrně rychlostí v_1, kterou získal na prvním úseku:

$$v_1 = a_1t_1 = \sqrt{\frac{2lg\sin\alpha}{3}}$$

a doba průjezdu druhým úsekem bude $t_2 = \dfrac{l}{3v_1} = \sqrt{\dfrac{l}{6g\sin\alpha}} = \dfrac{t_1}{2}$. Na třetím úseku se sáňkař pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = g\sin\alpha$ a s počáteční rychlostí v_1. Platí tedy

$$\frac{l}{3} = v_1t_3 + \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t_3^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme

$$t_3 = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + \dfrac{2}{3}lg\sin\alpha}}{g\sin\alpha} = \frac{-\sqrt{\dfrac{2}{3}lg\sin\alpha} \pm \sqrt{\dfrac{4}{3}lg\sin\alpha}}{g\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{2l}{3g\sin\alpha}}\cdot(-1\pm\sqrt{2}).$$

Úloze vyhovuje kořen $t_3 = t_1(\sqrt{2}-1)$. Celková doba jízdy sáňkaře bude

$$t' = t_1 + \frac{t_1}{2} + t_1(\sqrt{2}-1) = t_1\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2l}{3g\sin\alpha}}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Číselně vychází $t' = 7{,}6$ s. **5 bodů**