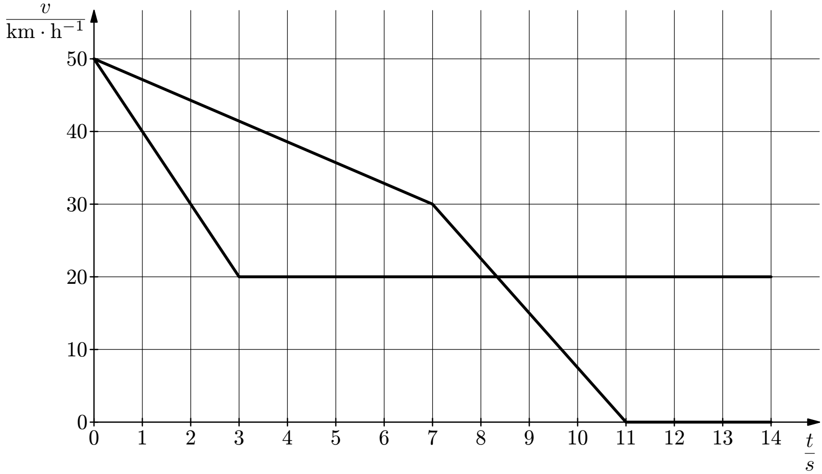
Řešení úloh 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Graf



6 bodů

b) Pomocí obsahu plochy pod grafem určíme dráhu každého automobilu. Dráha prvního automobilu

$$s_1 = \left[\left(30 + \frac{1}{2} \cdot 20\right) : 3{,}6\right] \cdot 7\,\mathrm{m} + \left[\frac{1}{2} \cdot 30 : 3{,}6\right] \cdot 4\,\mathrm{m} = 94{,}4\ \mathrm{m}$$

je současně vzdáleností obou automobilů před hranicí přechodu. Dráha druhého automobilu uražená během svícení červeného světla na semaforu je

$$s_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 30 : 3{,}6\right) \cdot 3\,\mathrm{m} + (20 : 3{,}6) \cdot 14\,\mathrm{m} = 90{,}3\ \mathrm{m}.$$

Z porovnání $s_1 > s_2$ plyne, že druhý automobil na červenou na přechod nevjede. Během žluté urazí automobil dráhu

$$\Delta s_2 = (20 : 3{,}6) \cdot 1\,\mathrm{m} = 5{,}6\ \mathrm{m}.$$

Z porovnání $s_1 < s_2 + \Delta s_2$ plyne, že druhý automobil vjel na přechod na žluté světlo.

4 body

2. a) Z Davidova měření času lze určit velikost zrychlení vlaku, použijeme rovnici

$$d = \frac{1}{2}at_1^2. \tag{1}$$

Z rovnice plyne $a = \dfrac{2d}{t_1^2} = \dfrac{2 \cdot 270}{60^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Z Jakubova měření času, ze známé velikosti zrychlení a ze známé délky vlaku lze určit velikost rychlosti, s níž vlak začal vjíždět do tunelu. Z rovnice

$$d = v_0 t_2 + \frac{1}{2}at_2^2 \tag{2}$$

vypočteme velikost v_0 rychlosti vlaku v okamžiku, kdy začíná vjíždět do tunelu:

$$v_0 = \frac{d - \frac{1}{2}at_2^2}{t_2} = \frac{270 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 36^2}{36}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Hledaná velikost rychlosti je

$$v_2 = v_0 + at_2 = (4{,}8 + 0{,}15 \cdot 36)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 10{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

b) Z rovnice (1) vyjádříme velikost zrychlení

$$a = \frac{2d}{t_1^2} \tag{3}$$

a dosadíme do rovnice (2): $d = v_0 t_2 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2d}{t_1^2} \cdot t_2^2$.
Vyjádřením v_0 dostaneme

$$v_0 = \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 t_2} d. \tag{4}$$

Nyní do rovnice $v_2 = v_0 + at_2$ dosadíme vztahy (3) a (4):

$$v_2 = \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 t_2} d + \frac{2d}{t_1^2} t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 t_2} d,$$

což je obecné řešení úlohy.

4 body

Nyní ověříme shodu jednotek:

$$\left[\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 t_2} d\right] = \frac{[t_1]^2 + [t_2]^2}{[t_1]^2 \cdot [t_2]} [d] = \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{m \cdot s^{-1}} = [v_2].$$

Po číselném dosazení dostaneme

$$v_2 = \frac{60^2 + 36^2}{60^2 \cdot 36} \cdot 270\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 10{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

3. a) Pavlík se pohybuje rychlostí o velikosti $v = \dfrac{2\pi r}{T}$.

Velikost jeho dostředivého zrychlení je $a_\mathrm{d} = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2} = 3{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2 body

b) Situaci budeme posuzovat z hlediska Pavlíka v neinerciální vztažné soustavě spojené s kolotočem. Tíhová síla má velikost $F_G = mg = 206$ N. Celková síla působící na Pavlíka je výslednice tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{d}$. Tato výslednice má velikost

$$F = \sqrt{F_G^2 + F_\mathrm{s}^2} = \sqrt{(mg)^2 + \left(m\frac{4\pi^2 r}{T^2}\right)^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{16\pi^4 r^2}{T^4}} \doteq 220\ \mathrm{N}.$$

Pro úhel platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{4\pi^2 r}{gT^2}, \quad \alpha = 19^\circ.$$

4 body

c) Velikost tečného zrychlení během zastavování je

$$a_\mathrm{t} = \frac{v}{t} = \frac{2\pi r}{tT} = 0{,}36\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Zastaví na dráze $s = \dfrac{1}{2}a_\mathrm{t}t^2 = \dfrac{\pi r}{T}t$,

přičemž opíše úhel $\varphi = \dfrac{s}{r} = \dfrac{\pi t}{T} = \dfrac{3\pi}{2}\ \mathrm{rad} = 270^\circ$.

4 body

4. a) Sklon fošny je určen úhlem α, pro který platí $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$. Z rovnice dostaneme $\alpha_1 = 30{,}0°$, $\alpha_2 = 17{,}0°$. Při rovnoměrném tlačení působíme na bednu ve směru pohybu po nakloněné rovině vzhůru silou, jejíž velikost je rovna součtu velikosti složky tíhové síly ve směru nakloněné roviny a velikosti třecí síly:

$$F = F_G \sin\alpha + F_\mathrm{t} = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Číselně vychází $F_1 = 790$ N, $F_2 = 640$ N. Musí použít delší fošnu.

3 body

b) Pro práci platí $W = Fl$. Při použití kratší fošny dostaneme $W_1 = F_1 l_1 = 2\,200$ J, při použití delší fošny $W_2 = F_2 l_2 = 3\,100$ J.
Musí použít kratší fošnu.

2 body

c) Při pohybu dolů má třecí síla vzhledem ke směru složky tíhové síly naopak opačný směr. Velikost jejich výslednice pak je

$$F = |F_G \sin\alpha - F_\mathrm{t}| = |mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha| = mg|\sin\alpha - f\cos\alpha|.$$

Pro kratší fošnu dostaneme $F_G \sin\alpha_1 > F_{\mathrm{t}1}$, tedy bedna sjížděla bez přispění chlapců rovnoměrně zrychleným pohybem vlivem síly o velikosti $F_1 = 97$ N, spotřebovali přitom práci $W_1' = F_1 l_1 = 270$ J. (Tuto práci vykonala tíhová síla, práce se projevila jako kinetická energie bedny při opouštění nakloněné roviny). Pro delší fošnu dostaneme $F_G \sin\alpha_2 < F_{\mathrm{t}2}$, tedy chlapci bednu při skládání tlačili silou o velikosti $F_2 = 120$ N a vykonali práci $W_2 = F_2 l_2 = 50$ J.

5 bodů

5. a) Obsah plochy pod grafem závislosti výkonu na čase udává kinetickou energii. Označme $P = 48\,000$ W. V čase $t_1 = 4$ s je kinetická energie automobilu

$$E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2}Pt_1 = \frac{1}{2} \cdot 48\,000\ \mathrm{W} \cdot 4\ \mathrm{s} = 96\,000\ \mathrm{J}.$$

Velikost rychlosti získáme z rovnice $E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2}mv_1^2$, z níž plyne

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}1}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 96\,000}{1\,400}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 11{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

V čase $t_2 = 9$ s je kinetická energie automobilu

$$E_{\mathrm{k}2} = E_{\mathrm{k}1} + P(t_2 - t_1) = [96\,000 + 48\,000 \cdot (9 - 4)]\ \mathrm{J} = 336\,000\ \mathrm{J}.$$

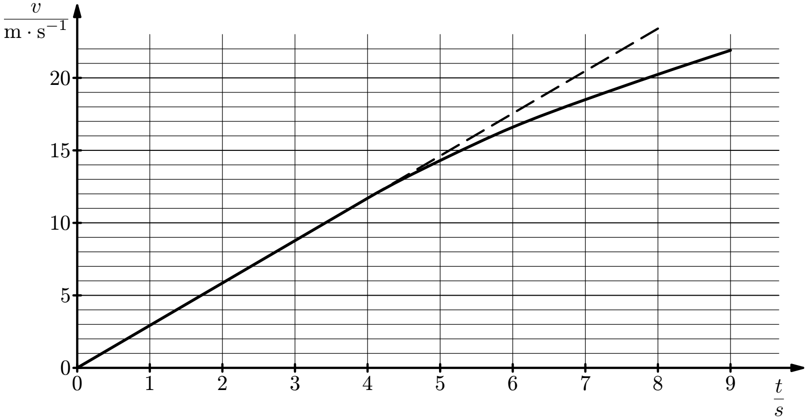
Obdobně dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}2}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 336\,000}{1\,400}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 21{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

b) Postup je stejný jako v úloze a)

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{E_\mathrm{k}}{\mathrm{kJ}}$	0	6	24	54	96	144	192	240	288	336
$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	0	2,9	5,9	8,8	11,7	14,3	16,6	18,5	20,3	21,9



4 body

c) Pohyb na prvním úseku je rovnoměrně zrychlený s konstantním zrychlením

$$a = \frac{v_1}{t_1} = 2{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Na druhém úseku, kdy je konstantní výkon, je průměrné zrychlení

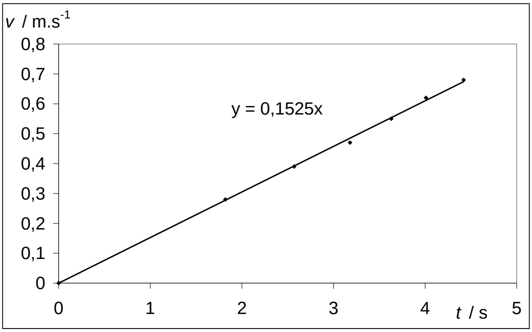
$$a_\mathrm{p} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

6. Příklad výsledků měření:

Dráhy byly změřeny s přesností na centimetry, časy byly odečítány ze stopek mobilního telefonu s přesností na setiny sekundy.

$\frac{s}{\text{m}}$	$\frac{t_1}{\text{s}}$	$\frac{t_2}{\text{s}}$	$\frac{t_3}{\text{s}}$	$\frac{t_4}{\text{s}}$	$\frac{t_5}{\text{s}}$	$\frac{\bar{t}}{\text{s}}$	$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	1,83	1,72	1,95	1,78	1,80	1,82	0,28
0,50	2,61	2,48	2,54	2,69	2,55	2,57	0,39
0,75	3,26	3,22	3,19	3,11	3,14	3,18	0,47
1,00	3,73	3,62	3,59	3,66	3,54	3,63	0,55
1,25	4,05	3,91	4,01	4,08	3,98	4,01	0,62
1,50	4,44	4,33	4,40	4,49	4,42	4,42	0,68



Rovnice přímky je $y = 0{,}1525x$, fyzikálně $\{v\} = 0{,}1525\{t\}$. To znamená, že střední hodnota zrychlení kuličky po zaokrouhlení na 2 platné číslice je $a = 0{,}15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Závěr: Měřením jsme ověřili, že pohyb kuličky po nakloněné rovině byl v mezích přesnosti měření rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti $a = 0{,}15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

7. a) Družice B vykoná za stejný čas více oběhů než družice A, proto má družice B větší úhlovou rychlost. Podle 3. Keplerova zákona s rostoucím poloměrem kruhové trajektorie doba oběhu roste (frekvence klesá) a podle vzorce pro obvodovou (kruhovou) rychlost $v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}$ s rostoucím poloměrem kruhová rychlost klesá, proto větší kruhovou rychlost má družice B.

2 body

b) Doba oběhu družice A je $T_A = 2\ \mathrm{h} = 7\,200\ \mathrm{s}$,
doba oběhu družice B je $T_B = \frac{24\ \mathrm{h}}{13} = 6\,646\ \mathrm{s}$.
Gravitační síla je dostředivou silou, proto

$$F_\mathrm{g} = \frac{\varkappa m M}{r^2} = F_\mathrm{d} = m r \omega^2 = m r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

plyne

$$r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M T^2}{4\pi^2}}. \tag{1}$$

Číselně dostaneme $r_A = 8\,061\ \mathrm{km}$, $r_B = 7\,642\ \mathrm{km}$. Minimální vzdálenost družic je $r_\mathrm{min} = r_A - r_B = 420\ \mathrm{km}$, maximální $r_\mathrm{max} = r_A + r_B = 15\,700\ \mathrm{km}$.

4 body

c) Z rovnice (1) plyne $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\varkappa M}}$, kde $r = R + 400\ \mathrm{km} = 6\,778\ \mathrm{km}$. Číselným dosazením dostaneme $T = 5\,552\ \mathrm{s}$, což odpovídá $\frac{86\,400\ \mathrm{s}}{5\,552\ \mathrm{s}} = 15{,}56$ oběhům za 24 hodin. Hledaný celočíselný počet je 15 oběhů (při 16 obězích by byla příliš nízko). Doba jednoho oběhu pak je $T_1 = \frac{24}{15}\mathrm{h} = 5\,760\ \mathrm{s}$. Z 3. Keplerova zákona porovnáním např. s parametry družice A plyne $r_1 = r_A \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_A^2}} = 6\,947\ \mathrm{km}$. Hledaná výška je $h_1 = r_1 - R = 570\ \mathrm{km}$.

4 body