Řešení úloh krajského kola 55. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3), J. Thomas (4).

1. a) Z rovnosti velikostí tíhové a setrvačné odstředivé síly $mg = \frac{mv_1^2}{l}$ plyne

$$v_1 = \sqrt{gl} = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \tag{1}$$

1 bod

b) Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg \cdot 2l = \frac{1}{2}mv_2^2$$

plyne $v_2 = \sqrt{4gl + v_1^2}$. Po dosazení vztahu (1) a úpravě dostaneme

$$v_2 = \sqrt{5gl} = 4{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \tag{2}$$

3 body

c) Nit je napínána silou, která je výslednicí tíhové síly a setrvačné odstředivé síly. Její velikost je

$$F_2 = mg + \frac{mv_2^2}{l}.$$

Po dosazení vztahu (2) dostaneme

$$F_2 = 6mg = 8{,}2\ \mathrm{N}.$$

3 body

d) Při průchodu vodorovnou polohou je tíhová síla kolmá na napnutou nit, proto napnutí nitě způsobuje pouze setrvačná odstředivá síla. Její velikost je

$$F_3 = \frac{mv_3^2}{l}, \tag{3}$$

kde v_3 je velikost rychlosti kuličky v této poloze. Tu získáme opět ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl = \frac{1}{2}mv_3^2.$$

Dosazením vztahu (1) a úpravou dostaneme $v_3 = \sqrt{3gl}$. Po dosazení do vztahu (3) dostaneme

$$F_3 = 3mg = 4{,}1\ \mathrm{N}.$$

3 body

2. a) Z rovnic pro rovnoměrně zpomalený pohyb na vodorovné rovině

$$s_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2, \tag{1}$$

$$v_\mathrm{m} = a_2t_2$$

plyne $v_\mathrm{m} = \dfrac{2s_2}{t_2} = 9{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2 body

b) Rovnoměrně zpomalený pohyb saní na vodorovné rovině způsobuje třecí síla, pro jejíž velikost platí $F_\mathrm{t} = ma_2 = fmg$. Užitím vztahu (1) dostaneme

$$f = \frac{2s_2}{gt_2^2} = \frac{2\cdot 58}{9{,}81\cdot 12^2} = 0{,}082.$$

3 body

c) Konečná velikost rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na svahu je současně velikostí počáteční rychlosti rovnoměrně zpomaleného pohybu na vodorovné rovině. Proto podle výsledku úlohy a) platí

$$v_\mathrm{m} = \frac{2s_2}{t_2} = \frac{2s_1}{t_1}, \quad \text{z čehož plyne} \quad t_1 = t_2\frac{s_1}{s_2}.$$

Dosazením do rovnice $s_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2$ pak dostaneme

$$a_1 = \frac{2s_2^2}{s_1t_2^2} = \frac{2\cdot 58^2}{70\cdot 12^2} = 0{,}67\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

3 body

d) Celková doba jízdy byla

$$t = t_1 + t_2 = t_2\frac{s_1}{s_2} + t_2 = t_2\frac{s_1+s_2}{s_2} = 12\cdot\frac{70+58}{58}\ \mathrm{s} = 26\ \mathrm{s}.$$

2 body

3. a) Dráhu každého automobilu určíme jako obsah plochy pod grafem na časovém intervalu 0 s až 20 s:

$$s_\mathrm{S} = \left(\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 14 + 21\cdot(20-14)\right)\ \mathrm{m} = 273\ \mathrm{m},$$

$$s_\mathrm{T} = \left(\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot(12+18)\cdot(16-6) + 18\cdot(20-16)\right)\ \mathrm{m} = 258\ \mathrm{m},$$

2 body

b) Velikost tahové síly Superbu při rozjíždění je

$$F_\mathrm{S} = m_\mathrm{S} a_\mathrm{S} = 1\,800\cdot 1{,}5\ \mathrm{N} = 2\,700\ \mathrm{N}.$$

Velikost tahové síly Transitu je větší na prvním úseku, kde měl větší velikost zrychlení:

$$F_\mathrm{T} = m_\mathrm{T} a_\mathrm{T} = 2\,500\cdot 2\ \mathrm{N} = 5\,000\ \mathrm{N}.$$

2 body

c) Vykonaná práce je rovna získané kinetické energii

$$W_\mathrm{S} = E_\mathrm{kS} = \frac{1}{2}\cdot 1\,800\cdot 21^2\ \mathrm{J} = 397\ \mathrm{kJ},$$

$$W_\mathrm{T} = E_\mathrm{kT} = \frac{1}{2}\cdot 2\,500\cdot 18^2\ \mathrm{J} = 405\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

d) Největší okamžitý výkon během rovnoměrně zrychleného pohybu má automobil vždy na konci zrychleného úseku, kdy má největší velikost rychlosti ($P = Fv = mav$). Superb má největší okamžitý výkon v okamžiku dosažení rychlosti $v = 21\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$:

$$P_\mathrm{S} = m_\mathrm{S} a_\mathrm{S} v_\mathrm{S} = 1\,800\cdot 1{,}5\cdot 21\ \mathrm{W} = 56{,}7\ \mathrm{kW}.$$

Transit má v okamžiku dosažení rychlosti $v_\mathrm{T1} = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ výkon

$$P_\mathrm{T1} = m_\mathrm{T} a_\mathrm{T1} v_\mathrm{T1} = 2\,500\cdot 2\cdot 12\ \mathrm{W} = 60{,}0\ \mathrm{kW}.$$

v okamžiku dosažení rychlosti $v_\mathrm{T2} = 18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ výkon

$$P_\mathrm{T2} = m_\mathrm{T} a_\mathrm{T2} v_\mathrm{T2} = 2\,500\cdot 0{,}6\cdot 18\ \mathrm{W} = 27{,}0\ \mathrm{kW}.$$

Tedy největšího výkonu dosáhl na konci prvního úseku $P_\mathrm{T1} = 60{,}0\ \mathrm{kW}$.

2 body

e) Průměrné výkony automobilů během rozjíždění jsou

$$P_\mathrm{S} = \frac{W_\mathrm{S}}{t_\mathrm{S}} = \frac{397\,000}{14}\ \mathrm{W} = 28{,}4\ \mathrm{kW}, \qquad P_\mathrm{T} = \frac{W_\mathrm{T}}{t_\mathrm{T}} = \frac{405\,000}{16}\ \mathrm{W} = 25{,}3\ \mathrm{kW}.$$

2 body

4. a) Užitím 3. Keplerova zákona určíme délku hlavní poloosy trajektorie planetky:

$$\frac{a^3}{a_{\rm Z}^3} = \frac{T_{\rm Z}^2}{T_{\rm E}^2},$$

kde $T_{\rm Z} = 1$ rok je doba oběhu Země a $a_{\rm Z} = 1$ AU je délka hlavní polosy její trajektorie. Pak

$$a = a_{\rm z}\sqrt[3]{\frac{T_{\rm E}^2}{T_{\rm Z}^2}} = 1{,}46 \text{ AU}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{r_{\rm a} - a}{a} = 0{,}22,$$

$$r_{\rm p} = 2a - r_{\rm a} = 1{,}14 \text{ AU}.$$

3 body

b) Označme $m_{\rm N}$ hmotnost sondy NEAR. Při oběhu sondy po kruhové trajektorii kolem planetky je gravitační síla silou dostředivou:

$$G\frac{M_{\rm E}m_{\rm N}}{r_{\rm N}^2} = m_{\rm N}\frac{4\pi^2}{T_{\rm N}^2}r_{\rm N},$$

$$M_{\rm E} = \frac{4\pi^2 r_{\rm N}^3}{GT_{\rm N}^2} = \frac{4\pi^2(1{,}55\cdot 10^5)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(6{,}6\cdot 24\cdot 3\,600)^2} = 6{,}8\cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$\varrho = \frac{M_{\rm E}}{\frac{4}{3}\pi r_{\rm E}^3} = 2{,}4\cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

4 body

c) Předpokládáme-li kulový tvar planetky, pak na těleso o hmotnosti m by na povrchu planetky působila gravitačni síla

$$ma_{\rm g} = G\frac{M_{\rm E}m}{r_{\rm E}^2}.$$

Z toho

$$a_{\rm g} = \frac{GM_{\rm E}}{r_{\rm E}^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}8\cdot 10^{15}}{8\,800^2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 5{,}9\cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Sondě je při startu nutno udělit parabolickou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{\rm E}}{r_{\rm E}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}8\cdot 10^{15}}{8\,800}} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 10{,}2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

3 body