Řešení úloh krajského kola 56. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1, 3, 4) a M. Kapoun (2)

1. a) Bude-li se mravenec pohybovat po nejkratší dráze, bude se pohybovat pouze po bočních stěnách rychlostí v a boční hranu překročí právě v její polovině (obr. R1). Pak pro jeho dráhu platí

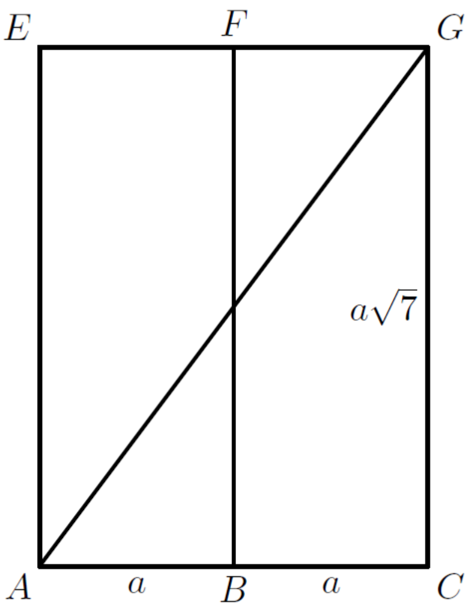
$$s_1 = \sqrt{4a^2 + 7a^2} = a\sqrt{11}$$

a doba trvání jeho cesty bude

$$t_1 = \frac{a\sqrt{11}}{v}.$$

Číselně: $s_1 = 33{,}2$ cm, $t_1 = 66{,}3$ s.

4 body



Obr. R1

b) Nejprve určíme podmínku minimálního času. Označíme-li vzdálenost místa překročení hrany EF od bodu F jako x a dobu pohybu jako T, pak z obr. R2 plyne:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{7a^2 + (a-x)^2}}{v}.$$

Hledáme minimum této funkce, takže

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{a-x}{v\sqrt{7a^2 + (a-x)^2}} = 0,$$

tj.

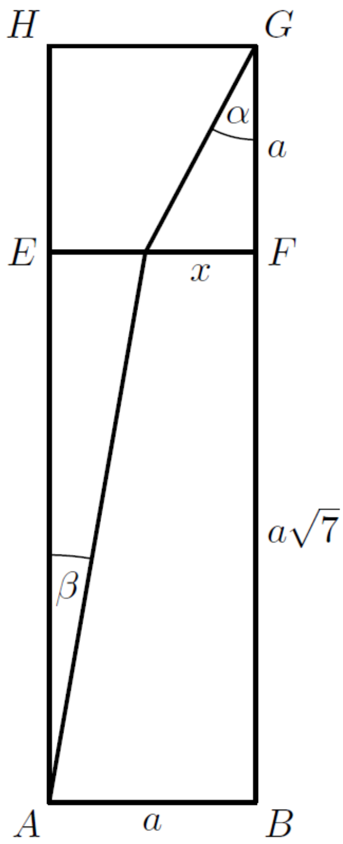
$$\frac{\sin\alpha}{u} - \frac{\sin\beta}{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{u}{v} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

V našem případě $x = a/2$, takže

$$u = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}v = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{29}}}v = 2{,}4v = 1{,}2\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}.$$

Zpáteční cesta mravenci potrvá dobu

$$t_2 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{5}}{v\sqrt{5{,}8}} + \frac{\frac{a}{2}\sqrt{29}}{v} = 63{,}1\ \mathrm{s}.$$



Obr. R2

6 bodů

Poznámka: Postup použitý při řešení úlohy b) je obdobný jako odvození zákona lomu vlnění na základě Fermatova principu.

2. a) Z kvantové podmínky získáme $r_n \cdot v_n = k_1 \cdot n$ a z identity coulombické síly působící na elektron coby síla dostředivá na kruhové dráze plyne vztah $r_n \cdot v_n^2 = k_2$, kde k_1, k_2 jsou konstanty. Srovnáním dostaneme $v_n = v_1/n, r_n = r_1 \cdot n^2$. Energie elektronu pak vychází

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}.$$

3 body

V Bohrově modelu atomu vodíku (viz studijní text) se elektron pohybuje po kruhových trajektoriích o poloměrech

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \cdot n^2 = r_1 n^2, \quad r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}, \tag{1}$$

s obvodovými rychlostmi

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}, \quad v_1 = 2{,}19 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \tag{2}$$

a energiemi

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad E_1 = -13{,}6\,\mathrm{eV} = -2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}. \tag{3}$$

Při přechodu $n+1 \to n$ se uvolní energie rovná energii vyzářeného fotonu

$$\frac{E_1}{(n+1)^2} - \frac{E_1}{n^2} = -\frac{E_1(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Vzhledem k charakteru úlohy očekáváme, že řešením rovnice

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{hc}{\lambda E_1} = 5{,}39 \cdot 10^{-4}$$

bude přirozené číslo. Postupným dosazováním za n zjistíme, že vyhovuje (v mezích numerické přesnosti) pouze $n = 15$. Vidíme, že energie vyzářeného fotonu je klesající funkcí n, proto lze k určení n použít též půlení intervalu.

3 body

b) Dosazením $n = 15$ do (1) a (2) dostáváme

$$r_{15} = 225 r_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}, \quad v_{15} = \frac{v_1}{15} = 1{,}46 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

c) De Broglieova vlnová délka elektronu pro $n = 15$ se na jeho trajektorii vejde patnáctkrát, tedy

$$\lambda_\mathrm{B} = \frac{2\pi r_{15}}{15} = 15 \cdot 2\pi r_1 = 5{,}0\ \mathrm{nm}.$$

Stejný výsledek dostaneme užitím vztahu $\lambda_\mathrm{B} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_{15}}$.

2 body

3. a) Z kalorimetrické rovnice $mc(t_1 - t_{01}) = \Delta mc(t_{02} - t_1)$ vyjádříme t_1:

$$t_1 = \frac{mt_{01} + \Delta mt_{02}}{m + \Delta m} = \frac{kt_{02} + t_{01}}{k+1}, \quad \text{kde } k = \frac{\Delta m}{m} < 1.$$

Po vrácení vody do druhého kalorimetru platí: $c(2m - \Delta m)(t_{02} - t_2) = c\Delta m(t_2 - t_1)$, takže po úpravě

$$2t_2 = t_{02}(2-k) + kt_1 = t_{02}(2-k) + \frac{k^2 t_{02} + kt_{01}}{k+1} = \frac{k(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{k+1}.$$

Pro rozdíl teplot platí

$$t_2 - t_1 = \frac{k(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{2(k+1)} - \frac{kt_{02} + t_{01}}{k+1} = \frac{2(t_{02} - t_{01}) - k(t_{02} - t_{01})}{2(k+1)}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2-k}{2(1+k)}(t_{02} - t_{01}) = 42\,°\mathrm{C}.$$

5 bodů

b) Budeme-li přelévání opakovat ještě jednou, bude postup podobný a dostaneme

$$t_4 - t_3 = \frac{2-k}{2(1+k)}(t_2 - t_1) = \left[\frac{2-k}{2(1+k)}\right]^2 (t_{02} - t_{01}) = 29\,°\mathrm{C}.$$

2 body

c) Aby byl rozdíl teplot $\Delta t < 1\,°\mathrm{C}$, musíme celý proces opakovat nejméně n–krát, musíme tedy vyřešit exponenciální rovnici:

$$\Delta t = \left[\frac{2-k}{2(1+k)}\right]^n (t_{02} - t_{01}) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log \frac{\Delta t}{t_{02} - t_{01}}}{\log \frac{2-k}{2(1+k)}} = 11{,}5.$$

Celý postup tedy budeme muset opakovat 12krát.

3 body

4. a) Při zahřívání se objem vzduchu zvětšuje a voda začne z trubice vytékat. Když z trubice vyteče třetina množství vody, bude objem vzduchu $\frac{10}{3}V_0$ a jeho tlak bude $p_1 = p_0 + \rho g \frac{V_0}{3S}$, jeho teplota se zvýší na T. Zapíšeme stavovou rovnici:

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \rho g \frac{V_0}{3S}\right) \frac{10}{3} V_0}{T}.$$

Odsud vyjádříme rozdíl teplot:

$$T - T_0 = \frac{T_0}{p_0 3V_0}\left(\frac{10}{3}p_0 V_0 + \rho g \frac{10V_0^2}{9S} - p_0 3V_0\right) = \frac{T_0}{3p_0 V_0}\left(\frac{1}{3}p_0 V_0 + \rho g \frac{10V_0^2}{9S}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{10V_0 \rho g}{27Sp_0}\right) T_0 = 38{,}8\,\mathrm{K}.$$

4 body

b) Dodané teplo určíme pomocí 1. zákona termodynamiky: $Q = \Delta U + W'$, kde

$$\Delta U = \frac{5}{2}nR(T - T_0) = \frac{15p_0V_0}{2T_0}(T - T_0) = \frac{15p_0V_0}{2T_0}\frac{T_0}{p_0 3V_0}\left(\frac{1}{3}p_0V_0 + \rho g\frac{10V_0^2}{9S}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}p_0V_0 + \rho g\frac{10V_0^2}{9S}\right) = \frac{5}{6}p_0V_0 + \frac{25\rho g V_0^2}{9S}.$$

Práce plynu během rozpínání probíhá při lineárně rostoucím tlaku z počáteční hodnoty p_0 na konečnou hodnotu $p_0 + \rho g\frac{V_0}{3S}$. Plyn vykonal práci

$$W' = \frac{p_0 + \left(p_0 + \rho g\frac{V_0}{3S}\right)}{2} \cdot \frac{V_0}{3} = \frac{1}{3}p_0V_0 + \frac{\rho g V_0^2}{18S}.$$

Dosazením do 1. zákona termodynamiky:

$$Q = \Delta U + W' = \frac{5}{6}p_0V_0 + \frac{25\rho g V_0^2}{9S} + \frac{1}{3}p_0V_0 + \frac{\rho g V_0^2}{18S} = \frac{7}{6}p_0V_0 + \frac{17\rho g V_0^2}{6S} = 3{,}3\ \mathrm{J}.$$

4 body

Alternativní výpočet práce plynu:

Práci plynem vykonanou určíme ze zákona zachování energie. Hladinu nulové potenciální energie zvolíme u základny trubice. Na počátku má voda potenciální energii tíhovou

$$E_{\mathrm{p1}} = \rho V_0 g\frac{V_0}{4S}.$$

Protože zahřívání probíhá pomalu, nemusíme uvažovat kinetickou energii vytékající kapaliny.

Třetina množství vody byla vytěsněna do výšky $\frac{V_0}{2S}$, těžiště zbylé kapaliny se nyní nachází ve výšce $(1/12 + 1/3)/2 \cdot \frac{V_0}{S} = \frac{5}{24}\frac{V_0}{S}$. Potenciální energie vody tedy nyní bude

$$E_{\mathrm{p2}} = \frac{\rho V_0}{3}g\frac{V_0}{2S} + \rho\frac{2}{3}V_0 g \cdot \frac{5}{24}\frac{V_0}{S} = \frac{11\rho g V_0^2}{36S}.$$

Plyn také koná práci při zvětšování svého objemu proti atmosférickému tlaku:

$$W_0' = p_0\frac{V_0}{3}.$$

Celkem tedy plyn vykoná práci:

$$W' = E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}} + W_0' = \frac{11\rho g V_0^2}{36S} - \rho V_0 g\frac{V_0}{4S} + p_0\frac{V_0}{3} = \frac{\rho g V_0^2}{18S} + p_0\frac{V_0}{3}.$$

c) V levém rameni rozpínající se vzduch působí proti vzlínání vody, tedy práce vykonaná plynem je v důsledku kapilarity větší než vypočtená. Prohne se i hladina vody při jejím vytékání z pravého ramena a i zde kapilární tlak brání vytékání vody. Kapilární tlak má při dokonalém smáčení v trubici o poloměru r velikost $p_{\mathrm{k}} = \frac{2\sigma}{r}$ a celkový kapilární tlak má hodnotu

$$p_{\mathrm{k}} = 4\sigma\sqrt{\frac{\pi}{S}}$$

Při teplotě 300 K je jeho číselná hodnota 72 Pa a v porovnání s atmosférickým tlakem je jeho vliv zanedbatelný.

2 body