Řešení experimentální úlohy celostátního kola 56. ročníku FO, kat. A

Autor úlohy: J. Blažek, J. Tesař

1a)

Pro každou z délek 100, 120, 150 a 180 cm kapalného sloupce byla měřena doba 10 kmitů, měření bylo opakováno desetkrát. Z dat byla určena průměrná doba jednoho kmitu $\overline{T}$ a směrodatná odchylka jednoho měření

$$s_T = \sqrt{\frac{\sum_k (T_k - \overline{T})^2}{n-1}} ,$$

kde $n = 10$ je celkový počet měření. Chybu lze také pouze odhadnout z rozptylu naměřených dat kolem střední hodnoty, pak ovšem nepůjde o směrodatnou odchylku. Úhlová rychlost $\omega = 2\pi / T$ má stejnou relativní chybu jako má doba kmitu, odtud $s_\omega = \omega s_T / T$.

L /m	1,00	1,20	1,50	1,80
T /s	1,46±0,01	1,58±0,01	1,77±0,01	1,94±0,01
ω /s^{-1}	4,31±0,03	3,98±0,03	3,54±0,02	3,24±0,02

4 body

1b)

Koeficient útlumu počítáme z identity $bT = \ln(A_n / A_{n+1})$. Jelikož tento způsob výpočtu závisí pouze na relativní velikosti amplitud, můžeme obě sady měření – bez ohledu na rozdílnou počáteční výchylku A_0 – zpracovat najednou. Z každé sady měření vynecháme počáteční podíl A_0 / A_1. V tabulkách uvádíme vedle amplitud A_n zároveň veličiny $bT = \ln(A_n / A_{n+1})$, z nichž po vyloučení odlehlých hodnot vypočteme aritmetický průměr. Chybu v tomto případě neurčujeme.

$L = 100$ cm				
n	$A_n^{(1)}$	$\ln(A_n^{(1)}/A_{n+1}^{(1)})$	$A_n^{(2)}$	$\ln(A_n^{(2)}/A_{n+1}^{(2)})$
0	40,0	~~0,72~~	40,0	~~0,74~~
1	19,5	0,49	19,0	0,48
2	12,0	0,54	11,7	0,59
3	7,0	0,44	6,5	0,49
4	4,5	0,47	4,0	0,36
5	2,8	0,62	2,8	0,44
6	1,5	0,41	1,8	0,59
7	1,0	~~0,69~~	1,0	~~0,22~~
8	0,5		0,8	

$\overline{bT} = 0{,}49$, $\boxed{b = 0{,}34 \text{ s}^{-1}}$

$L = 120$ cm				
n	$A_n^{(1)}$	$\ln(A_n^{(1)}/A_{n+1}^{(1)})$	$A_n^{(2)}$	$\ln(A_n^{(2)}/A_{n+1}^{(2)})$
0	39,5	~~0,73~~	39,0	~~0,73~~
1	19,0	0,50	18,8	0,50
2	11,5	0,47	11,4	0,42
3	7,2	0,41	7,5	0,45
4	4,8	0,47	4,8	0,47
5	3,0	0,31	3,0	0,36
6	2,2	0,45	2,1	0,41
7	1,4	0,56	1,4	0,56
8	0,8		0,8	

$\overline{bT} = 0{,}45$, $\boxed{b = 0{,}28\ \mathrm{s^{-1}}}$

$L = 150$ cm				
n	$A_n^{(1)}$	$\ln(A_n^{(1)}/A_{n+1}^{(1)})$	$A_n^{(2)}$	$\ln(A_n^{(2)}/A_{n+1}^{(2)})$
0	35,0	~~0,68~~	35,0	~~0,62~~
1	17,8	0,53	18,8	0,56
2	10,5	0,50	10,7	0,53
3	6,4	0,42	6,3	0,45
4	4,2	0,41	4,0	0,39
5	2,8	0,39	2,7	0,46
6	1,9	~~0,64~~	1,7	0,53
7	1,0	~~0,69~~	1,0	~~0,69~~
8	0,5		0,5	

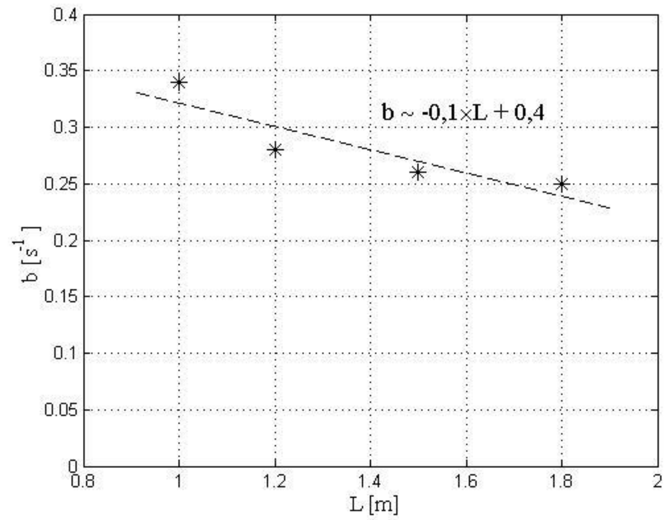
$\overline{bT} = 0{,}46$, $\boxed{b = 0{,}26\ \mathrm{s^{-1}}}$

$L = 180$ cm				
n	$A_n^{(1)}$	$\ln(A_n^{(1)}/A_{n+1}^{(1)})$	$A_n^{(2)}$	$\ln(A_n^{(2)}/A_{n+1}^{(2)})$
0	30,0	~~0,63~~	30,0	~~0,64~~
1	16,0	0,53	15,8	0,60
2	9,4	0,54	8,7	0,44
3	5,5	0,42	5,6	0,44
4	3,6	0,54	3,6	0,41
5	2,1	0,48	2,4	0,47
6	1,3	0,49	1,5	~~0,63~~
7	0,8	0,47	0,8	0,47
8	0,5		0,5	

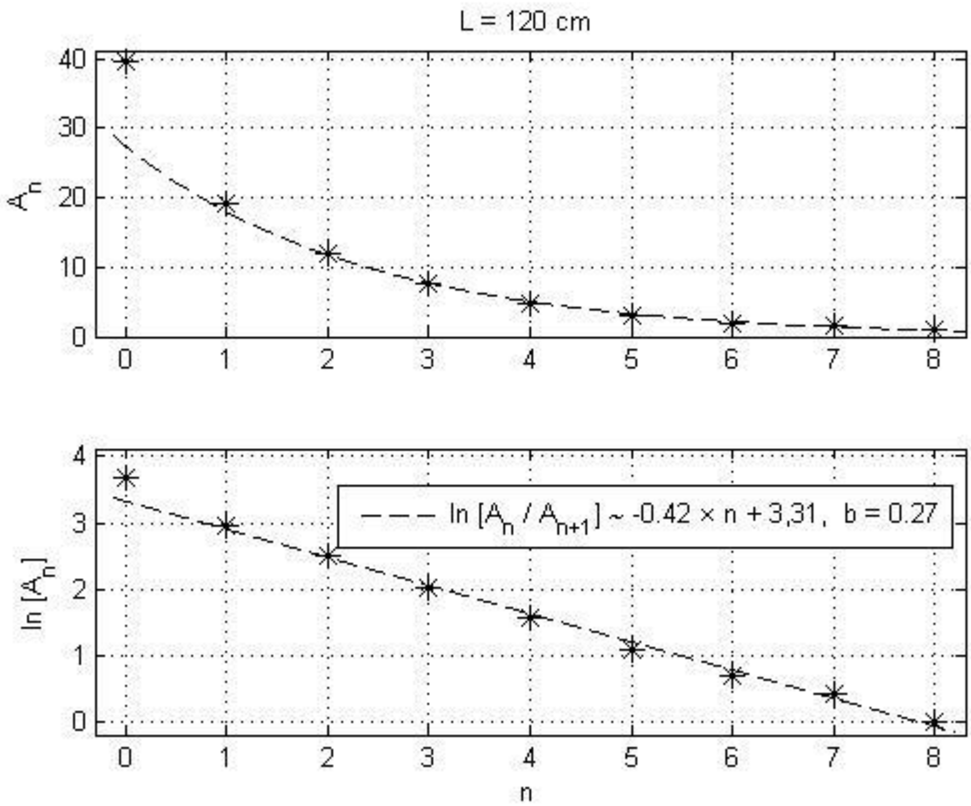
$\overline{bT} = 0{,}48$, $\boxed{b = 0{,}25\ \mathrm{s^{-1}}}$

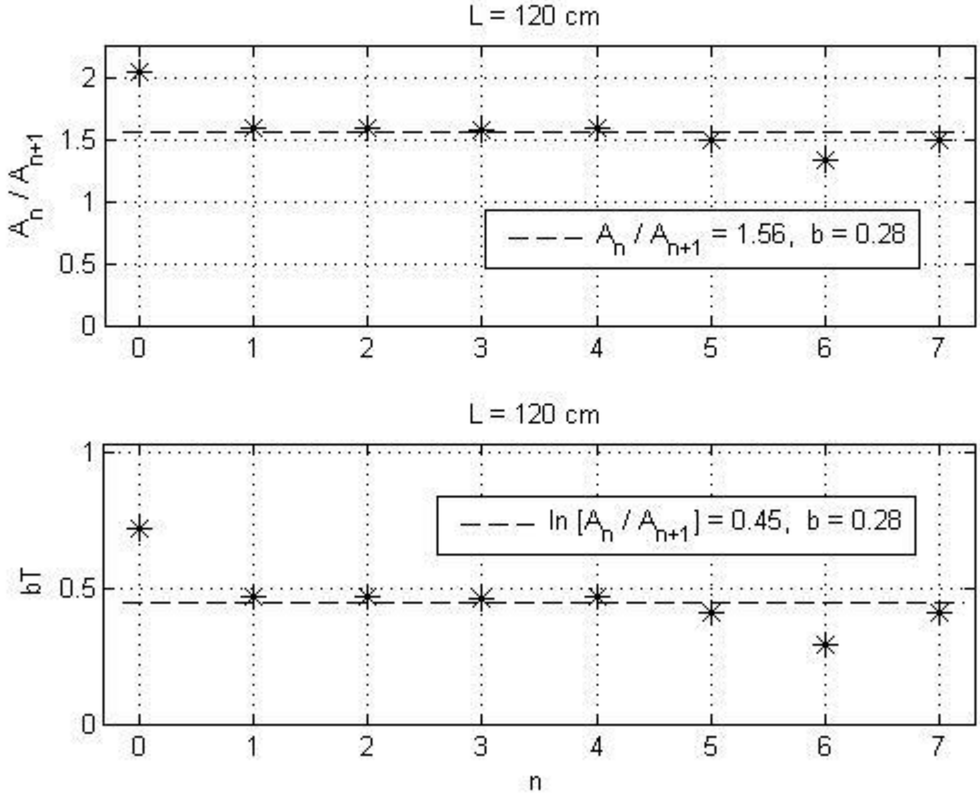
Naměřené hodnoty shrnuje tabulka a znázorňuje graf. Koeficient útlumu vykazuje slabý pokles s délkou kapalného sloupce.

L /m	1,00	1,20	1,50	1,80
b /s $^{-1}$	0,34	0,28	0,26	0,25



Grafické zpracování měření amplitud pro vybranou délku je na následujících grafech.





8 bodů

2a)

Vychýlení y sloupce z rovnovážné hodnoty vyvolá návratovou sílu, odpovídající převýšení $2y$ obou hladin. Za zjednodušujících předpokladů, že na sloupec během kmitavého pohybu nepůsobí tření a částečky kapaliny se v celém jejím objemu pohybují toutéž rychlostí, dostáváme pro jeho zrychlení a rovnici

$$ma = -2y\frac{m}{L}g$$

kde m je hmotnost kapalného sloupce a $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ je tíhové zrychlení. Rovnice popisuje harmonické kmity o úhlové rychlosti a periodě

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}$$

4 body

2b)

L /m	1,00	1,20	1,50	1,80
b /s^{-1}	0,34	0,28	0,26	0,25
β /s^{-1}	1,05	0,73	0,69	0,64
β/b	3,1	2,6	2,7	2,6

I z těchto poměrně hrubých měření je zřejmé, že model tlumených kmitů s harmonickou silou úměrnou výchylce a viskózní silou úměrnou rychlosti nevede ke správnému určení koeficientu útlumu. Ten je ve skutečnosti téměř třikrát menší než předpovídá teoretický model z rovnice (2).

4 body