Řešení úloh celostátního kola 56. ročníku fyzikální olympiády

Autoři úloh: J. Thomas (1, 3, 4) a M. Kapoun (2)

1. a) Rozjíždění automobilu bude probíhat ve dvou fázích. V první fázi budou kola prokluzovat. Automobil se v této fázi bude rozjíždět s konstantním zrychlením $a = fg$, jehož velikost můžeme určit z brzdné dráhy:

$$a = fg = \frac{v_0^2}{2s_\mathrm{b}} \doteq 5{,}88\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Část výkonu motoru, která se postupně bude zvětšovat, se využije na zvyšování kinetické energie automobilu, zbytek se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie pneumatik a vozovky při prokluzování kol:

$$P = Fv + P_\mathrm{ztr} = mav + P_\mathrm{ztr} = m\frac{v_0^2}{2s_\mathrm{b}}v + P_\mathrm{ztr}.$$

Kola automobilu přestanou prokluzovat v okamžiku, kdy velikost rychlosti automobilu dosáhne hodnoty v_1, při které se celý výkon automobilu spotřebuje na jeho zrychlování:

$$P = mav_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{P}{ma} = \frac{2Ps_\mathrm{b}}{mv_0^2} \doteq 10{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

První fáze pohybu proběhne za dobu

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{P}{ma^2} = \frac{4Ps_\mathrm{b}^2}{mv_0^4} \doteq 1{,}76\,\mathrm{s}.$$

3 body

V druhé fázi rozjíždění už kola nebudou prokluzovat a celá práce motoru povede ke zvýšení kinetické energie automobilu. Na zvýšení rychlosti z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 bude třeba za dobu t_2 vykonat práci

$$Pt_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2P} = \frac{m}{2P}\left(v_2^2 - \frac{4s_\mathrm{b}^2P^2}{m^2v_0^4}\right) \doteq 4{,}26\,\mathrm{s}.$$

Celková doba rozjíždění pak bude $t = t_1 + t_2 = 6{,}0\,\mathrm{s}$.

2 body

b) V první fázi rozjíždění automobil urazí dráhu

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{P^2}{2m^2a^3} = \frac{4P^2s_\mathrm{b}^3}{m^2v_0^6} \doteq 9{,}1\,\mathrm{m}.$$

V druhé fázi rozjíždění se při konstantním výkonu zvyšuje rychlost automobilu, jeho zrychlení se zmenšuje. Pro závislost okamžité rychlosti v na čase t měřeném od okamžiku dosažení rychlosti v_1 dostaneme

$$Pt = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t}.$$

Dráhu v druhém úseku určíme integrací:

$$s_2 = \int_0^{t_2} \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t}\mathrm{d}t = \left[\frac{m}{3P}\sqrt{\left(v_1^2 + \frac{2P}{m}t\right)^3}\right]_0^{t_2} =$$

$$= \frac{m}{3P}\sqrt{\left(v_1^2 + \frac{2P}{m}t_2\right)^3} - \frac{m}{3P}v_1^3 \doteq 79{,}5\,\mathrm{m}.$$

Použili jsme úpravu:

$$v_1^2 + \frac{2P}{m}t = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{m}{2P}\mathrm{d}x,$$

$$\int \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t}\mathrm{d}t = \frac{m}{2P}\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{m}{3P}\sqrt{x^3} + C = \frac{m}{3P}\sqrt{\left(v_1^2 + \frac{2P}{m}t\right)^3} + C.$$

Celková dráha pak bude $s = s_1 + s_2 = 88{,}7\,\mathrm{m}$.

5 bodů

2. a) Střední energie tepelného pohybu částice se třemi stupni volnosti činí $3 \cdot \frac{1}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota souboru. Střední kvadratická rychlost částice je tedy rovna $\sqrt{3kT/m_0}$ a odpovídající hybnost je $p = \sqrt{3m_0kT}$.

2 body

Pak de Broglieova vlnová délka $\lambda = h/p$, tedy

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_0kT}}, \tag{1}$$

při pokojové teplotě $T = 293\,\mathrm{K}$ a pro $m_0 = m_\mathrm{e}$ vychází $\lambda = 6{,}3\,\mathrm{nm}$.

1 bod

b) Na jednu částici připadá střední objem V/N, odkud pro střední vzdálenost vychází

$$d = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}.$$

1 bod

Pro elektronový plyn platí

$$d = \left(\frac{M_\mathrm{m}}{\rho N_\mathrm{A}}\right)^{1/3} = 0{,}23\,\mathrm{nm}.$$

2 body

c) Z podmínky $\lambda \geq d$ vychází užitím (1)

$$T \leq \frac{h^2}{3m_0k}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = T_\mathrm{Q}.$$

1 bod

Po úpravě a s uvážením, že atomy mědi přispívají elektronovému plynu jedním valenčním elektronem, pak dostáváme

$$T_\mathrm{Q} = \frac{h^2}{3m_0k}\left(\frac{\rho N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{m}}\right)^{2/3}.$$

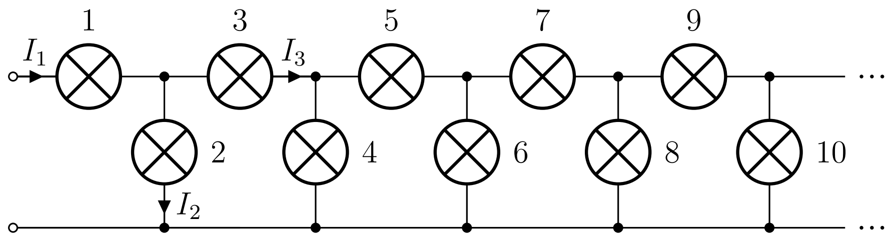
Číselně pro $m_0 = m_\mathrm{e}$ vychází teplota degenerace $T_\mathrm{Q} = 2{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{K}$.

2 body

d) Elektronový plyn tedy představuje kvantový soubor, a to v celém teplotním oboru existence jakéhokoli kovu.

1 bod

3. Ze zapojení žárovek je vidět, že přepálení vlákna hrozí nejvíce u žárovky 1. Proud I_1, který touto žárovkou prochází, se pak větví na proudy I_2 a I_3, proud I_3 se pak dále větví (viz obr. R1).



Obr. R1: Proudy v síti

Z VA charakteristiky žárovky vidíme, že napětí na každé žárovce (tedy i na žárovce 1) může být nejvýše $U_1 = 6{,}0\,\mathrm{V}$ a žárovkou přitom protéká proud $I_1 = 0{,}80\,\mathrm{A}$.

1 bod

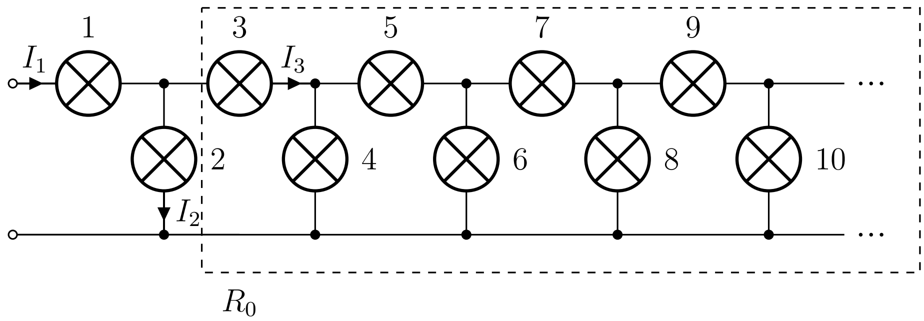
Ostatními žárovkami protéká menší proud a je na nich i menší napětí. Protože napětí na žárovce 2: $U_2 = U_3 + U_4$, musí být $U_2 > U_3$, a tedy $I_2 > I_3$. Proto proud $I_3 < 0{,}4\,\mathrm{A}$.

1 bod

Proud procházející ostatními žárovkami je určitě ještě menší, proto můžeme z VA charakteristiky určit, že jejich odpor je stálý a je roven $R = 5{,}0\,\Omega$.

1 bod

Označme R_0 odpor sítě bez žárovek 1 a 2 (viz obr. R2):



Obr. R2: K odvození odporu

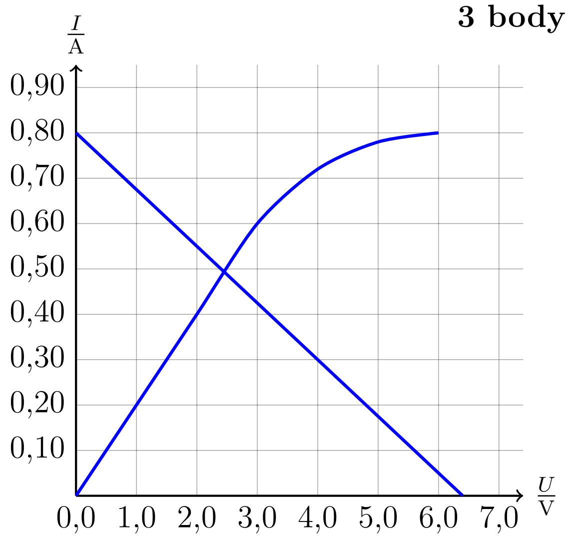
Musí platit: $R_0 = R + \frac{RR_0}{R+R_0} \quad \Rightarrow \quad R_0 = 0{,}5\left(\sqrt{5}+1\right) R \doteq 8{,}1\,\Omega.$

3 body

Napětí na žárovce 2: $U_2 = (I_1 - I_2)\,R_0$, takže pro proud platí $I_2 = I_1 - \frac{U_2}{R_0}$. Do rovnice dosadíme číselné hodnoty I_1 a R_0. Hodnoty proudu a napětí na žárovce 2 splňují rovnici $\{I\} = 0{,}80 - 0{,}124\{U\}$, současně pro ně platí voltampérová charakteristika. Z grafického řešení na obrázku plyne, že hodnota napětí $U_2 = 2{,}5\,\mathrm{V}$.

Síť tedy můžeme připojit na napětí $U = U_1 + U_2 = 8{,}5\,\mathrm{V}$. Hodnotu napětí U_2 lze určit i algebraicky.

4 body



4. a) Při prvním přepojení klíče vlevo se napětí na kondenzátorech C a C_1 vyrovná na hodnotě U_A. Platí:

$$C\left(U_2 - U_A\right) = C_1\left(U_A - U_1\right) \quad \Rightarrow \quad U_A = \frac{C_1 U_1 + C U_2}{C + C_1}.$$

Po přepojení klíče do původní polohy se napětí na kondenzátorech C a C_2 vyrovná na hodnotě U_B. Platí:

$$C_2\left(U_2 - U_B\right) = C\left(U_B - U_A\right),$$

$$U_B = \frac{C_2 U_2 + C U_A}{C + C_2} = \frac{U_2\left(CC_2 + C_1 C_2 + C^2\right) + U_1 C C_1}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)}.$$

Rozdíl napětí po prvním cyklu tedy bude:

$$U_B - U_A = \frac{U_2\left(CC_2 + C_1 C_2 + C^2\right) + U_1 C C_1}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)} - \frac{C_1 U_1 + C U_2}{C + C_1} =$$

$$= \frac{C_1 C_2}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)}\left(U_2 - U_1\right).$$

Rozdíl napětí po 7 cyklech je

$$5{,}5\,\mathrm{V} = \left[\frac{C_1 C_2}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)}\right]^7 \cdot \left(U_2 - U_1\right) = \left[\frac{C_1 C_2}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)}\right]^7 \cdot 50\,\mathrm{V}.$$

Po úpravě:

$$\left[\frac{C_1 C_2}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)}\right]^7 = 0{,}11,$$

$$\log\frac{C_1 C_2}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)} = \frac{\log 0{,}11}{7} = -0{,}1369,$$

$$\frac{C_1 C_2}{\left(C + C_1\right)\left(C + C_2\right)} = 10^{-0{,}1369} = 0{,}7296,$$

dojdeme ke kvadratické rovnici pro číselnou hodnotu kapacity C v mikrofaradech:

$$\{C\}^2 + 12\{C\} - 12{,}97 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen $C \doteq 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$.

5 bodů

b) Podle zákona zachování náboje

$$C_1 U_1 + \left(C + C_2\right) U_2 = \left(C_1 + C_2 + C\right) U_\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad U_\mathrm{m} = \frac{C_1 U_1 + \left(C + C_2\right) U_2}{C_1 + C_2 + C} \doteq 51\,\mathrm{V}.$$

2 body

c) Teplo uvolněné na rezistoru je rovno rozdílu počáteční a konečné energie soustavy kondenzátorů:

$$Q = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{\left(C + C_2\right) U_2^2}{2} - \frac{\left(C_1 + C_2 + C\right) U_\mathrm{m}^2}{2} \doteq 3{,}8\,\mathrm{mJ}.$$

3 body