Řešení úloh krajského kola 56. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4) a J. Jírů (3)

1. a) Pro dobu kmitu fyzického kyvadla platí: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D_1}}$. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející vrcholem čtvercové desky je podle Steinerovy věty

$$J_1 = \frac{1}{6}ma^2 + m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2,$$

direkční moment je

$$D_1 = mg\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Pro dobu kmitu pak platí

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}ma^2}{mg\frac{a\sqrt{2}}{2}}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{3g\sqrt{2}}} = 0{,}62\,\mathrm{s}.$$

3 body

b) Nejprve určíme moment setrvačnosti J_T obdélníkové desky vzhledem k ose procházející kolmo jejím těžištěm. Ten bude součtem momentů setrvačnosti dvou čtverců vzhledem k ose procházející středem jedné z jeho stran:

$$J_T = 2\left[\frac{1}{6}ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{5}{6}ma^2.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející vrcholem obdélníka pak bude

$$J_2 = J_T + 2m\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{6}ma^2 + \frac{5}{2}ma^2 = \frac{10}{3}ma^2.$$

Direkční moment

$$D_2 = 2mg\frac{a\sqrt{5}}{2} = mga\sqrt{5}.$$

Doba kmitu obdélníkové desky

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{D_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{10}{3}ma^2}{mga\sqrt{5}}} = 2\pi\sqrt{\frac{10a}{3g\sqrt{5}}} = 0{,}77\,\mathrm{s}.$$

4 body

c) Čtvercová deska o straně a a hmotnosti m se skládá ze čtyř čtvercových desek o straně $\frac{a}{2}$ a hmotnosti $\frac{m}{4}$. Moment setrvačnosti J_0 desky kolem osy procházející jejím středem bude

$$J_0 = 4\left[n\frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2\right] = 4\left[\frac{nma^2}{16} + \frac{ma^2}{32}\right].$$

Po zkrácení a úpravě dostáváme $n = \frac{1}{6}$.

3 body

Řešení části c) pomocí integrálního počtu:

$$J_0 = \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4m}{a^2} \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{4m}{a^2} \int_0^{a/2} \left(\frac{a^3}{24} + \frac{ay^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \frac{4m}{a^2} \left[\frac{a^3 y}{24} + \frac{ay^3}{6}\right]_0^{a/2} = \frac{1}{6} ma^2.$$

2. a) Označme r odpor jedné strany rovnostranného trojúhelníku. Pak

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}R.$$

Výška rovnostranného trojúhelníka má pak odpor $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.
Odpor mezi body X a C bez dolní větve vedené bodem B je

$$R_{XC} = \frac{\frac{3r}{2} \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{3r}{2} + \frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{3r\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}}.$$

Celkový odpor mezi body X a Y:

$$R_{XY} = \frac{\left(R_{XC} + \frac{r}{2}\right) r}{R_{XC} + \frac{r}{2} + r} = \frac{\left(\frac{3r\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} + \frac{r}{2}\right) r}{\frac{3r\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} + \frac{r}{2} + r} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{9 + 6\sqrt{3}} r = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} R \doteq 0{,}77R.$$

4 body

b) Odpor mezi body X a Z v trojúhelníku AZX je stejný jako odpor mezi body Z a Y v trojúhelníku ZYC:

$$R_{AXZ} = \frac{r \cdot \frac{r}{2}}{r + \frac{r}{2}} = \frac{r}{3} = R_{ZYC}.$$

Pro odpor mezi body X a Y pak platí:

$$\frac{1}{R_{XY}} = \frac{3}{2r} + \frac{2}{r} + \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad R_{XY} = \frac{2}{9} r = \frac{1}{3} R \doteq 0{,}33R.$$

3 body

c) Protože síť je souměrná podle osy procházející body T a B, budou mít tyto body při měření stejný potenciál a odpor mezi nimi nemusíme uvažovat. Odpor mezi body A a C bez dolní větve vedené bodem B je

$$R_{AC} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3} \cdot r}{\frac{2r\sqrt{3}}{3} + r} = \frac{2r\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Mezi body X a Y je pak odpor

$$R_{XY} = \frac{\left(R_{AC} + r\right) r}{R_{AC} + 2r} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} + r}{\frac{2r\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} + 2r} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6 + 6\sqrt{3}} r = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{4 + 4\sqrt{3}} R = \frac{9 - \sqrt{3}}{8} R \doteq 0{,}91R.$$

3 body

3. a) Uvažujme všechny síly působící např. na náboj ve vrcholu B. Trojice nejbližších nábojů ve vrcholech A, C, F, tj. nábojů ve vzdálenosti a, působí na náboj ve vrcholu B přitažlivou silou o velikosti $F_0 = k\frac{Q^2}{a^2}$, přičemž tyto síly jsou na sebe kolmé. Jejich výslednice má směr tělesové úhlopříčky k protilehlému vrcholu H (směr vektoru $\overrightarrow{BH}$). Velikost výslednice je

$$F_1 = \sqrt{F_0^2 + F_0^2 + F_0^2} = \sqrt{3}F_0.$$

2 body

Každý z trojice nábojů ve vrcholech D, E, G a ve vzdálenostech $\sqrt{2}a$ působí na náboj ve vrcholu B odpudivou silou o velikosti $\frac{F_0}{2}$. Jejich výslednice má směr tělesové úhlopříčky (vektoru $\overrightarrow{HB}$) a velikost

$$F_2 = 3\frac{F_0}{2}\cos\beta = 3\frac{F_0}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}F_0,$$

kde β je úhel mezi stěnovou a tělesovou úhlopříčkou.

2 body

Zbývající náboj ve vrcholu H, který je ve vzdálenosti $\sqrt{3}a$, působí na náboj ve vrcholu B ve směru tělesové úhlopříčky (vektoru $\overrightarrow{BH}$) přitažlivou silou o velikosti

$$F_3 = \frac{F_0}{3}.$$

1 bod

Výsledná elektrická síla působící na libovolný vrcholový náboj má směr příslušné tělesové úhlopříčky k protilehlému vrcholu (je přitažlivá) a má velikost

$$F = |F_1 - F_2 + F_3| = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{3}\right)F_0 = \frac{2 - 3\sqrt{6} + 6\sqrt{3}}{6}k\frac{Q^2}{a^2} \doteq 0{,}841k\frac{Q^2}{a^2}.$$

1 bod

b) Při vzdálení náboje např. ve vrcholu B od trojice nábojů ve vrcholech A, C, F vykoná vnější síla práci

$$W_1 = 3k\frac{Q^2}{a}.$$

Při vzdálení náboje ve vrcholu B od trojice nábojů ve vrcholech D, E, G vykoná elektrická síla práci

$$W_2 = 3k\frac{Q^2}{\sqrt{2}a}.$$

Při vzdálení náboje ve vrcholu B od náboje ve vrcholu H vykoná vnější síla práci

$$W_3 = k\frac{Q^2}{\sqrt{3}a}.$$

Celková práce vykonaná vnější silou pak je

$$W = W_1 - W_2 + W_3 = \left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{Q^2}{a} = \frac{18 - 9\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}k\frac{Q^2}{a} \doteq 1{,}46k\frac{Q^2}{a}.$$

4 body

4. a) Při rovnoměrném posouvání krabice směrem dolů je výslednice síly $\boldsymbol{F}_1$ a tečné složky tíhové síly v rovnováze se silou tření. Platí

$$F_1 + mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha, \tag{1}$$

kde α je úhel nakloněné roviny, $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, $\cos\alpha = \frac{z}{l}$, $l = \sqrt{h^2 + z^2}$.
Při posouvání směrem nahoru platí

$$F_2 - mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha. \tag{2}$$

Odečtením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$F_1 - F_2 - 2mg\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{(F_1 - F_2)\sqrt{h^2 + z^2}}{2h},$$

$$m = \frac{(F_1 - F_2)\sqrt{h^2 + z^2}}{2gh} = 0{,}82\ \text{kg}.$$

Sečtením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$F_1 + F_2 = 2fmg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \frac{F_1 + F_2}{2mg\cos\alpha},$$

$$f = \frac{(F_2 + F_1)h}{(F_1 - F_2)z} = 0{,}49.$$

4 body

b) Tečná složka síly $\boldsymbol{F}_3$ je v rovnováze s tečnou složkou tíhové síly a třecí silou. Působením normálové složky síly $\boldsymbol{F}_3$ se třecí síla zvětší o $fF_3\sin\alpha$. Platí

$$F_3\cos\alpha = mg\sin\alpha + f(mg\cos\alpha + F_3\sin\alpha),$$

$$F_3 = mg\frac{f\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = \frac{zF_2\,(F_2 - F_1)\,\sqrt{h^2 + z^2}}{z^2\,(F_2 - F_1) - h^2\,(F_2 + F_1)} = 7{,}9\ \text{N}.$$

4 body

c) Působíme-li ve směru spádnice, vykonáme práci

$$W = F_2 l = F_2\sqrt{h^2 + z^2} = 19{,}9\ \text{J}.$$

Působíme-li silou $\boldsymbol{F}_3$, vykonáme práci

$$W' = F_3\cos\alpha \cdot l = F_3 z = 23{,}8\ \text{J} \doteq 1{,}2W.$$

Práce je při působení vodorovnou silou asi o 20 % větší.

2 body