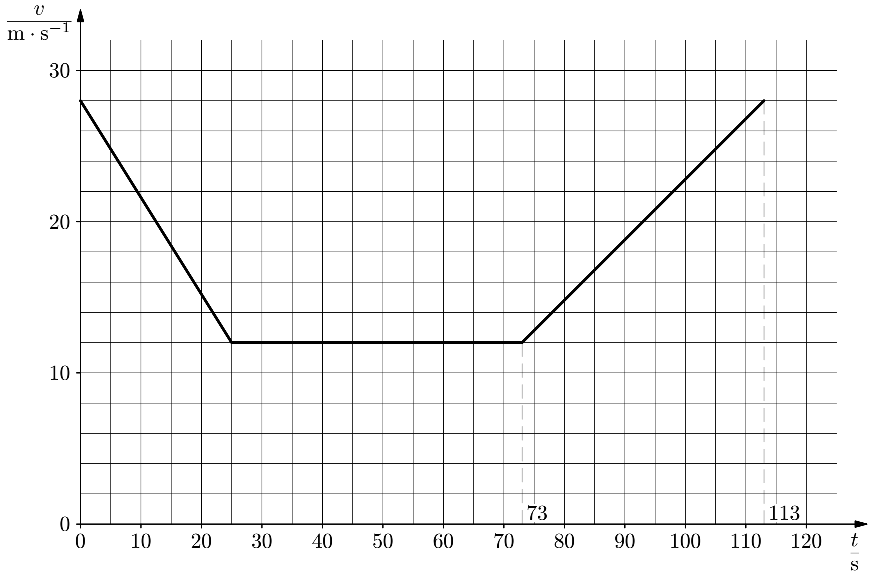
Řešení úloh 1. kola 56. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1. a) K sestrojení grafu potřebujeme vypočítat dobu Δt_2 rovnoměrného pohybu a dobu Δt_3 jízdy během zrychlování:

$$\Delta t_2 = \frac{(366 + 210)\ \mathrm{m}}{12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}} = 48\ \mathrm{s}, \qquad \Delta t_3 = \frac{\Delta v}{a} = \frac{(28 - 12)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{0{,}40\ \mathrm{s}} = 40\ \mathrm{s}.$$

2 body



5 bodů

b) Dráhu od okamžiku začátku brzdění do okamžiku dosažení konečné rychlosti určíme např. jako obsah plochy pod grafem

$$s = \left(\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 25 + 12\cdot 25 + 12\cdot 48 + \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 40 + 12\cdot 40\right)\ \mathrm{m} = 1\,876\ \mathrm{m}.$$

Při nesnížené rychlosti by celým úsekem projel za dobu

$$\Delta t_0 = \frac{1\,876\ \mathrm{m}}{28\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}} = 67\ \mathrm{s}.$$

Skutečná doba jízdy je $\Delta t = (25 + 48 + 40)\ \mathrm{s} = 113\ \mathrm{s}$, časový náskok by byl $\Delta t - \Delta t_0 = 46\ \mathrm{s}$.

3 body

2. a) Označme N počet otáček předního kola během doby t_1. Z rovnosti drah zadního a předního kola

$$5 \cdot 2\pi R = N \cdot 2\pi r = N \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3}R$$

plyne $N = 7{,}5$.
Úhlová rychlost otáčení předního kola před brzděním je

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{N}{t_1} = \frac{15\pi}{t_1} = 7{,}9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Velikost rychlosti traktoru před brzděním je

$$v = \frac{10\pi R}{t_1} = 3{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \qquad (1)$$

2 body

c) Z rovnic $s = \frac{1}{2}at^2$ a $v = at$ pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení plyne

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{v^2}{12\pi r} = \frac{v^2}{8\pi R}.$$

Dosazením vztahu (1) dostaneme

$$a = \frac{25\pi R}{2t_1^2} = 0{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \qquad (2)$$

Doba brzdění je

$$t_2 = \frac{v}{a},$$

dosazením vztahů (1) a (2) dostaneme

$$t_2 = \frac{2}{5}t_1 = 2{,}4 \text{ s}.$$

Brzdná dráha je

$$s = 6\pi r = 4\pi R = 8{,}7 \text{ m}.$$

6 bodů

3. a) Do rovnice pro dráhu

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

dosadíme velikost zrychlení danou vztahem

$$a = \frac{v - v_0}{t}. \qquad (1)$$

Po úpravě dostaneme

$$s = \frac{(v + v_0)t}{2}.$$

Z rovnice plyne

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = 6{,}7 \text{ s.} \tag{2}$$

Zpětným dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = 1{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 body

b) Průměrný výkon motocyklu je

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}{t}.$$

Po dosazení vztahu (2) a po úpravě dostaneme

$$P = \frac{m(v^2 - v_0^2)(v + v_0)}{4s} = 7{,}1\text{kW}.$$

4 body

c) Okamžité výkony jsou

$$P_{\min} = Fv_0 = mav_0 = m\frac{(v^2 - v_0^2)v_0}{2s} = 5{,}1\text{kW},$$

$$P_{\max} = Fv = mav = m\frac{(v^2 - v_0^2)v}{2s} = 9{,}1\text{kW}.$$

2 body

Poznámka: Průměrný výkon lze v případě rovnoměrně zrychleného pohybu určit též jako aritmetický průměr $P_{\min}$ a $P_{\max}$:

$$P = \frac{1}{2}(P_{\min} + P_{\max}) = \frac{1}{2}\left[m\frac{(v^2 - v_0^2)v_0}{2s} + m\frac{(v^2 - v_0^2)v}{2s}\right] = m\frac{(v^2 - v_0^2)}{4s}(v_0 + v).$$

Je to důsledek faktu, že okamžitý výkon je přímo úměrný okamžité rychlosti, tudíž též přímo úměrný času.

4. a) Krajní kulička každého ramene má poloměr otáčení $3l$, krajní třetina ramene je napínána silou o velikosti

$$F_1 = m \cdot 3l \cdot \omega^2 = 3ml\omega^2 = 1{,}5 \text{ N}.$$

Prostřední kulička každého ramene má poloměr otáčení $2l$, prostřední třetina ramene je napínána silou o velikosti

$$F_2 = F_1 + m \cdot 2l \cdot \omega^2 = 5ml\omega^2 = 2{,}4 \text{ N}.$$

Zbývající kulička každého ramene má poloměr otáčení l, vnitřní třetina ramene je napínána silou o velikosti

$$F_3 = F_2 + m \cdot l \cdot \omega^2 = 6ml\omega^2 = 2{,}9 \text{ N}.$$

3 body

Kinetická energie soustavy kuliček je rovna součtu kinetických energií jednotlivých kuliček:

$$E_\mathrm{k} = 2\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2\right) = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

kde

$$v_1 = 3l\omega, \quad v_2 = 2l\omega, \quad v_3 = l\omega.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$E_\mathrm{k} = m(9l^2\omega^2 + 4l^2\omega^2 + l^2\omega^2) = 14ml^2\omega^2 = 0{,}68\ \mathrm{J}.$$

3 body

b) Síly, kterými v každém rameni na osu otáčení působí 2 nejbližší kuličky k ose otáčení, se vzájemně ruší. Osa otáčení je namáhána působením dvou krajních kuliček delšího ramene:

$$F = m \cdot 3l \cdot \omega^2 + m \cdot 4l \cdot \omega^2 = 7ml\omega^2 = 3{,}4\ \mathrm{N}.$$

2 body

Kinetická energie soustavy kuliček je

$$E_\mathrm{k} = 2 \cdot \frac{1}{2}m(l\omega)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m(2l\omega)^2 + \frac{1}{2}m(3l\omega)^2 + \frac{1}{2}m(4l\omega)^2 = 17{,}5ml^2\omega^2 = 0{,}85\ \mathrm{J}.$$

2 body

5. a) Při jízdě do kopce musí cyklista překonávat odpor vzduchu a zdolávat stoupání. Velikost odporové síly je $F_\mathrm{odp1} = kv_1^2$, velikost složky tíhové síly proti směru pohybu $F_1 = mg\sin\alpha$. Cyklista jel do kopce s výkonem

$$P = (F_\mathrm{odp1} + F_1)v_1 = (kv_1^2 + mg\sin\alpha)v_1. \tag{1}$$

Při jízdě z kopce naopak složka tíhové síly k dosažení rychlosti přispívá, výkon cyklisty je

$$P = (F_\mathrm{odp2} - F_1)v_2 = (kv_2^2 - mg\sin\alpha)v_2.$$

Z rovnosti výkonů

$$kv_1^3 + mgv_1\sin\alpha = kv_2^3 - mgv_2\sin\alpha$$

plyne

$$k = \frac{mg(v_1 + v_2)\sin\alpha}{v_2^3 - v_1^3} = 0{,}32\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2}. \tag{2}$$

Výkon získáme číselným dosazením koeficientu k např. do rovnice (1):

$$P = (kv_1^2 + mg\sin\alpha)v_1 = 260\ \mathrm{W}.$$

5 bodů

b) Při jízdě z kopce nastane rovnost velikostí odporové síly a složky tíhové síly:

$$kv_3^2 = mg\sin\alpha.$$

Z rovnosti plyne $v_3 = \sqrt{\dfrac{mg\sin\alpha}{k}}$.

Užitím rovnice (2) dostaneme

$$v_3 = \sqrt{\frac{v_2^3 - v_1^3}{v_2 + v_1}} = 11{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

c) Při jízdě po rovině ovlivňuje pohyb pouze odpor vzduchu, pro výkon cyklisty platí $P = kv_0^3$.

Z rovnice plyne $v_0 = \sqrt[3]{\dfrac{P}{k}} = 9{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2 body

6. a) Z dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu do zastavení $s = \dfrac{1}{2}at^2$ získáme velikost zrychlení $a = \dfrac{2s}{t^2}$ a dosadíme do vztahu pro velikost třecí síly $F_\mathrm{t} = fmg = ma$. Vyjádřením f dostaneme $f = \dfrac{2s}{gt^2}$.

b) Dráhy byly změřeny s přesností na centimetry, časy byly odečítány ze stopek mobilního telefonu s přesností na setiny sekundy. Příklad výsledků měření:

hokejový puk na kameninové dlažbě			železný disk na kameninové dlažbě			hokejový puk na palubovce			železný disk na polubovce		
t / s	*s* / m	*f*	*t* / s	*s* / m	*f*	*t* / s	*s* / m	*f*	*t* / s	*s* / m	*f*
2,47	8,42	0,28	3,97	12,85	0,17	2,44	8,39	0,29	2,87	9,35	0,23
2,05	6,18	0,30	4,74	17,76	0,16	2,51	10,39	0,34	3,45	14,14	0,24
2,40	8,61	0,30	4,14	13,84	0,16	2,60	10,00	0,30	3,36	12,95	0,23
2,42	8,22	0,29	3,89	13,79	0,19	2,28	8,83	0,35	3,36	12,99	0,23
2,40	7,07	0,25	4,58	13,44	0,13	2,60	10,60	0,32	3,20	11,35	0,23
2,26	8,38	0,33	4,06	14,24	0,18	2,39	9,40	0,34	3,95	15,21	0,20
2,41	7,91	0,28	4,50	16,08	0,16	2,52	10,26	0,33	3,42	12,36	0,22
2,53	8,54	0,27	4,13	14,21	0,17	2,32	8,85	0,34	3,49	13,52	0,23
2,52	8,90	0,29	4,51	15,42	0,15	2,41	9,63	0,34	3,52	12,70	0,21
2,35	8,06	0,30	4,02	13,88	0,18	2,58	10,07	0,31	3,48	14,36	0,24
Aritm. průměr		0,29	Aritm. průměr		0,16	Aritm. průměr		0,32	Aritm. průměr		0,23
Prům. odchylka		0,016	Prům. odchylka		0,010	Prům. odchylka		0,016	Prům. odchylka		0,011
Relat. odchylka		0,056	Relat. odchylka		0,061	Relat. odchylka		0,048	Relat. odchylka		0,048

c) Měřením jsme dospěli k výsledkům:
Hokejový puk na kameninové dlažbě $f = 0{,}29 \pm 0{,}02$, $\delta f = 6\ \%$,
železný disk na kameninové dlažbě $f = 0{,}16 \pm 0{,}01$, $\delta f = 6\ \%$,
hokejový puk na palubovce $f = 0{,}32 \pm 0{,}02$, $\delta f = 5\ \%$,
železný disk na palubovce $f = 0{,}23 \pm 0{,}01$, $\delta f = 5\ \%$.

Měření délky lze provést zdánlivě přesně na centimetry, ale obtížně se určuje počátek rovnoměrně zpomaleného pohybu neboli místo, kde ruka přestane na urychlované těleso působit. Přesnost měření času je především ovlivněna okamžikem zastavení, který je třeba při zmáčknutí stopek vystihnout. Z hlediska výpočtu součinitele se vliv relativní odchylky času zdvojnásobuje, neboť ve vzorci vystupuje čas ve druhé mocnině.

7. a) Ze základních vztahů pro elipsu jako trajektorii družice Elidy plyne

$$e = 0{,}6a = 10\,200\ \mathrm{km}, \quad b = \sqrt{a^2 - e^2} = 0{,}8a = 13\,600\ \mathrm{km},$$

$$r_\mathrm{p} = a - e = 0{,}4a = 6\,800\ \mathrm{km}, \quad r_\mathrm{a} = a + e = 1{,}6a = 27\,200\ \mathrm{km}.$$

Kružnici můžeme považovat za zvláštní případ elipsy, pro níž platí

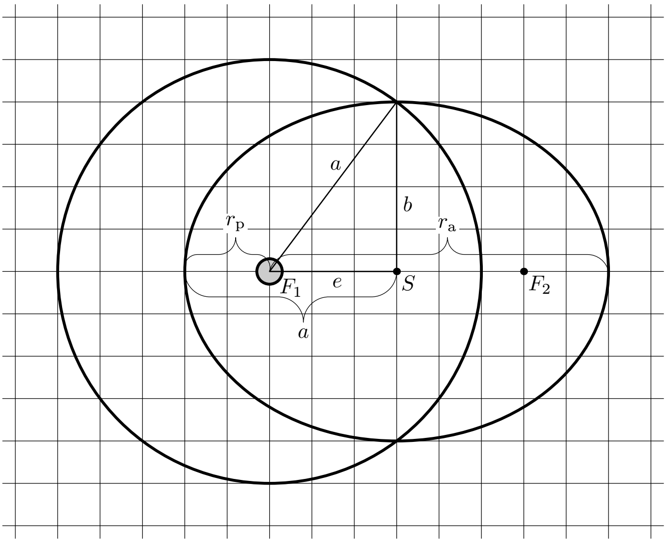
$$a = b = r.$$

Podle 3. Keplerova zákona pak při shodné periodě má družice Kruda poloměr shodný s délkou hlavní poloosy družice Elidy:

$$r = a = 17\,000\ \mathrm{km}.$$

2 body

b) V předepsaném měřítku vychází $a \mathrel{\widehat{=}} 5$ j, $b \mathrel{\widehat{=}} 4$ j, $e \mathrel{\widehat{=}} 3$ j, $r_\mathrm{p} \mathrel{\widehat{=}} 2$ j, $r_\mathrm{a} \mathrel{\widehat{=}} 8$ j. (Velikost Země se středem v ohnisku F_1 měřítku neodpovídá.)



3 body

c) Podle 2. Keplerova zákona v perigeu a v apogeu platí

$$\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = 4.$$

1 bod

d) Z gravitačního původu dostředivé síly při pohybu po kružnici plyne

$$mr\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 22\,052\ \mathrm{s} = 6\ \mathrm{h}\ 8\ \mathrm{min}.$$

2 body

e) Z gravitačního původu dostředivé síly při pohybu po kružnici plyne

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 4\,840\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body