Řešení úloh krajského kola 56. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3) a J. Thomas (4)

1. a) Doba jízdy na prvním úseku je

$$t_1 = t - t_2 = \frac{s}{v_p} - t_2 = 25{:}27\ \text{min}.$$

2 body

b) Dráha první části okruhu:

$$s_1 = v_1 t_1 = v_1 \left(\frac{s}{v_p} - t_2 \right) = 10{,}27\ \text{km}.$$

Dráha druhé části okruhu:

$$s_2 = s - s_1 = s - v_1 \left(\frac{s}{v_p} - t_2 \right) = 8{,}53\ \text{km}.$$

3 body

c) Průměrná rychlost na druhé části okruhu:

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s}{t_2} - \frac{v_1 s}{v_p t_2} + v_1 = 32{,}61\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

2 body

d) Dráha do kopce i s kopce je stejná, označme ji s. Dále označme t_1 čas jízdy do kopce, t_2 čas jízdy s kopce a t celkový čas jízdy. Janova průměrná rychlost jízdy s kopce pak je:

$$u_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{s}{t - t_1} = \frac{s}{\frac{2s}{u_p} - \frac{s}{u_1}} = \frac{u_1 u_p}{2u_1 - u_p} =$$

$$= \frac{21{,}76 \cdot 26{,}90}{2 \cdot 21{,}76 - 26{,}90}\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 35{,}22\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

3 body

2. a) Velikosti rychlostí jsou

$$v_1 = \frac{4}{7} l \cdot 2\pi f = 4{,}49\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_2 = \frac{3}{7} l \cdot 2\pi f = \frac{3}{4} v_1 = 3{,}37\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Poměr kinetických energií je

$$\frac{E_{\text{k2}}}{E_{\text{k1}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{3}{7} l \cdot 2\pi f\right)^2}{\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{4}{7} l \cdot 2\pi f\right)^2} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{9}{16} = \frac{0{,}240}{0{,}135} \cdot \frac{9}{16} = 1.$$

Kinetické energie obou kuliček jsou stejné. Místo výpočtu můžeme uvažovat takto: Podle obecného vzorce

$$E_\text{k} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

mají obě kuličky stejnou úhlovou rychlost ω. První kulička má 16/9 krát větší druhou mocninu poloměru otáčení, naopak druhá kulička má 16/9 krát větší hmotnost, proto je kinetická energie obou kuliček stejná.

2 body

c) Z hlediska neinerciálního pozorovatele spojeného s rotorem elektromotoru působí na osu otáčení ve směru svisle dolů stálá tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ obou kuliček o velikosti

$$F_{\mathrm{G}} = (m_1 + m_2)\, g = 3{,}68\ \mathrm{N}$$

a odstředivé síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}1}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}2}$, které mají navzájem opačný směr, a to od osy otáčení k příslušné kuličce. Velikost výsledné odstředivé síly je

$$F_{\mathrm{o}} = |F_{\mathrm{o}1} - F_{\mathrm{o}2}| = \left| m_1 \cdot \frac{4}{7} l \cdot (2\pi f)^2 - m_2 \cdot \frac{3}{7} l \cdot (2\pi f)^2 \right| =$$

$$= |4m_1 - 3m_2| \cdot \frac{4}{7} l \cdot \pi^2 f^2 = 3{,}17\ \mathrm{N}.$$

Osa otáčení je namáhána výslednou silou $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}$. Maximum její velikosti nastane při souhlasném směru sil, minimum její velikosti při navzájem opačném směru:

$$F_{\max} = F_{\mathrm{G}} + F_{\mathrm{o}} = 6{,}85\,\mathrm{N},$$
$$F_{\min} = |F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{o}}| = 0{,}51\,\mathrm{N}, F_{\mathrm{G}} > F_{\mathrm{o}}.$$

V obou případech směřuje výsledná síla svisle dolů.

4 body

d) Poměr ramen ve vodorovné poloze (ale i v šikmé poloze) tyče je 4:3, poměr hmotností kuliček 9:16, proto moment tíhové síly působící na hmotnější kuličku je větší než moment druhé tíhové síly (poměr momentů je $(3 \cdot 16) : (4 \cdot 9) = 4 : 3$). Těžší kulička tak většinou zůstane dole, kde se vlivem třecí síly v ložisku zastaví v okolí nejnižší polohy, ale z téhož důvodu se může zastavit i nahoře v okolí nejvyšší polohy. Konečnou polohu je možné zdůvodnit též porovnáním potenciálních energií kuliček nad sebou.

2 body

3. a) Z druhého Newtonova pohybového zákona

$$F = \frac{mv_1}{t_1}$$

dostaneme

$$t_1 = \frac{mv_1}{F} = 7{,}2\ \mathrm{s}.$$

2 body

b) Tažná síla na prvním úseku vykonala práci, která je rovna získané kinetické energii automobilu:

$$W = Fs_1 = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$s_1 = \frac{mv_1^2}{2F} = 43\ \mathrm{m}.$$

Je možné též vyjít ze vztahů $s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$, $v_1 = a t_1$, $F = ma$.

3 body

c) Okamžitý výkon na konci prvního úseku je

$$P = Fv_1 = 30\ \mathrm{kW}.$$

1 bod

d) Na druhém úseku vykoná motor automobilu užitečnou práci $W_2 = Pt_2 = Fv_1t_2$, která je rovna přírůstku kinetické energie automobilu:

$$W_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z rovnic plyne

$$t_2 = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2Fv_1} = 12\ \mathrm{s}.$$

3 body

e) Na prvním úseku podle vztahu $P = Fv = Fat$, kde velikosti síly a zrychlení jsou konstantní, je okamžitý výkon přímo úměrný času.

1 bod

4. a) Střední vzdálenost planetky od Slunce určíme pomocí 3. Keplerova zákona, kde využijeme parametry Země ($a_Z = 1$ au a $T_Z = 1$ rok):

$$a = a_Z \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_Z^2}} = 2{,}86\ \mathrm{au}.$$

Vzdálenosti planetky od Slunce v perihéliu a v aféliu:

$$r_p = a(1 - \varepsilon) = 2{,}73\ \mathrm{au},$$
$$r_a = a(1 + \varepsilon) = 2{,}99\ \mathrm{au}.$$

3 body

b) Pro střední rychlost platí

$$v_k = \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM_S}{a}} = 17{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Poměr rychlostí v perihéliu a v aféliu je

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1{,}1.$$

Největší rychlost má planetka v perihéliu:

$$v_p = v_k\sqrt{\frac{r_a}{r_p}} = v_k\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = 18{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}},$$

nejmenší rychlost má planetka v aféliu:

$$v_a = v_k\sqrt{\frac{r_p}{r_a}} = v_k\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} = 16{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

4 body

c) Dostředivou silou při pohybu měsíce Daktyl kolem planetky Ida je síla gravitační. Proto můžeme napsat

$$G\frac{m_\mathrm{D} m_\mathrm{I}}{r_\mathrm{D}^2} = m_\mathrm{D}\omega \cdot r_\mathrm{D} = m_\mathrm{D}\frac{4\pi^2}{T_\mathrm{D}^2}r_\mathrm{D} \quad \Rightarrow \quad m_\mathrm{I} = \frac{4\pi^2}{T_\mathrm{D}^2}\frac{r_\mathrm{D}^3}{G} = 2{,}4 \cdot 10^{16}\ \mathrm{kg}.$$

3 body