Řešení úloh okresního kola 56. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3), L. Richterek (4)

FO56E2–1: Triatlon

Údaje doplníme do tabulky:

	plavání		kolo		běh	
	rychlost	čas	rychlost	čas	rychlost	čas
A	3 km/h	30 min	9,23 m/s	1 h 12 min 15 s	4 m/s	5 000 s
B	0,893 m/s	28 min	36 km/h	4 000 s	3,8 m/s	5 263 s
C	0,9 m/s	1 667 s	8,89 m/s	1 h 15 min	3,62m/s	1 h 32 min 10 s

a případně vyjádříme ve stejných jednotkách, aby je bylo možné snáze porovnat:

závodník	plavání		kolo		běh	
	rychlost	čas	rychlost	čas	rychlost	čas
A	0,833 m/s	1 800 s	9,23 m/s	4 335 s	4,00 m/s	5 000 s
B	0,893 m/s	1 680 s	10,0 m/s	4 000 s	3,80 m/s	5 263 s
C	0,900 m/s	1 667 s	8,89 m/s	4 500 s	3,62m/s	5 530 s

Správné doplnění devíti výsledků v tabulce: **3 body**

a) Průběžné pořadí po jednotlivých disciplínách získáme z časů potřebných na jejich absolvování.

Po plavání: C (t_{C1} = 1 667 s), B (t_{B1} = 1 680 s), A (t_{A1} = 1 800 s)

Po jízdě na kole: B (t_{B2} = 1 680 s + 4 000 s = 5 680 s), A (t_{A2} = 1 800 s + 4 335 s = 6 135 s), C (t_{C2} = 1 667 s + 4 500 s = 6 167 s). **1 bod**

b) Celkové časy:

Aleš: t_{Ac} = 1 800 s + 4 335 s + 5 000 s = 11 135 s;

Bohouš: t_{Bc} = 1 680 s + 4 000 s + 5 263 s = 10 943 s;

Ctirad: t_{Cc} = 1 667 s + 4 500 s + 5 530 s = 11 697 s.

Pořadí v cíli tedy bude Bohouš, Aleš, Ctirad. **2 body**

c) Celková délka trasy závodu je

$$s = 1\,500\text{ m} + 40\,000\text{ m} + 20\,000\text{ m} = 61\,500\text{ m}.$$

Průměrné rychlosti závodníků potom vycházejí

$v_A = s/\,t_{Ac}$ = 61 500 m/11 135 s = 5,52 m/s;

$v_B = s/\,t_{Bc}$ = 61 500 m/10 943 s = 5,62 m/s;

$v_C = s/\,t_{Cc}$ = 61 500 m/11 697 s = 5,26 m/s. **2 body**

d) V plavání byl nejlepší Ctirad (čas 1 667 s = 27,8 min = 27 min 47 s).
Na kole byl nejrychlejší Bohouš (čas 4 000 s = 66,7 min = 66 min 40 s).
V běhu byl nejlepší Aleš (čas 5 000 s = 83,3 min = 83 min 20 s). **2 body**

FO56E2–2: Panel s rezistory

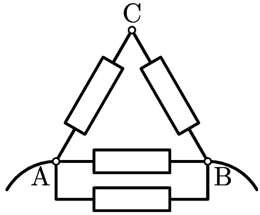
a) Celkový odpor zapojení odpovídá jednomu rezistoru R paralelně se dvěma za sebou, tj. $R_{AB} = R_{AC} = R_{BC} = \dfrac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \dfrac{2}{3}R$. **2 body**

b) Aby celkový odpor mezi zdířkami A a B byl $\dfrac{2}{5}R$, musíme připojit jeden rezistor paralelně ke zdířkám A a B (obr. 1). Pak bude platit, že ve třech větvích budou vedle sebe odpory R, R a $2R$, takže celkový odpor vychází:

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R},$$

$$\frac{1}{R_b} = \frac{2+2+1}{2R} = \frac{5}{2R},$$

$$R_b = \frac{2}{5}R.$$



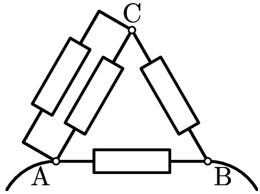
Obr. 1: Zapojení s celkovým odporem mezi zdířkami A a B rovným $2R/5$

3 body

c) Aby celkový odpor mezi zdířkami A a B byl $\dfrac{3}{5}R$, musíme připojit jeden rezistor paralelně ke zdířkám A a C nebo B a C (obr. 2). Potom $R_{AB} = R$, $R_{CB} = R$ a $R_{AC} = R/2$; celkový odpor odpovídá odporu R (větev A–B) a $R/2 + R = 3/2R$ (větev A–C–B) vedle sebe:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{3+2}{3R} = \frac{5}{3R};$$

$$R_c = \frac{3}{5}R$$



Obr. 2: Zapojení s celkovým odporem mezi zdířkami A a B rovným $3R/5$

2 body

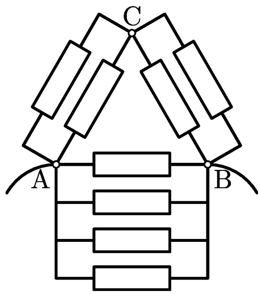
Pozn. k hodnocení: K plnému bodovému zisku stačí uvést jednu z možností.

d) Aby celkový odpor mezi zdířkami A a B byl $\dfrac{1}{5}R$, musíme připojit ke zdířkám A a B další tři rezistory a ke zdířkám A, C a B, C vždy jeden další rezistor (obr. 3). Ve větvi A–C–B je pak odpor $R/2 + R/2 = R$, pro čtyři rezistory vedle sebe mezi body A–B vychází výsledný odpor $R/4$. Pro celkový odpor pak bude platit:

$$\frac{1}{R_d} = \frac{1}{\frac{2}{R}+\frac{2}{R}} + \frac{4}{R} = \frac{1}{R} + \frac{4}{R} = \frac{5}{R},$$

$$R_d = \frac{1}{5}R$$

3 body



Obr. 3: Zapojení s celkovým odporem mezi zdířkami A a B rovným $R/5$

FO56E2–3: Zlatá koruna

a) Objem zlaté koruny vychází

$$V_1 = \frac{2{,}05\ \text{kg}}{19\ 300\ \text{kg/m}^3} = 1{,}062 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 106\ \text{cm}^3.$$

1 bod

b) Stříbrná koruna o stejné hmotnosti by měla objem

$$V_2 = \frac{2{,}05\ \text{kg}}{10\ 500\ \text{kg/m}^3} = 1{,}952 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 195\ \text{cm}^3.$$

1 bod

c) V bodě B působí síla $F_B = 4\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}^2 = 40\ \text{N}$. **1 bod**

d) V bodě A působí síla $F_A = 40\ \text{N} \cdot 0{,}24\ \text{m}/0{,}5\ \text{m} = 19{,}2\ \text{N}$. **1 bod**

e) Pro sílu v bodě A platí $F_A = m \cdot g - V \cdot \varrho_V \cdot g$, takže pro objem koruny vychází

$$V = \frac{20{,}5\ \text{N} - 19{,}2\ \text{N}}{1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 10\ \text{N/kg}} = \frac{1{,}3\ \text{N}}{1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 10\ \text{N/kg}} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 130\ \text{cm}^3.$$

3 body

f) Pro hmotnost zlata a stříbra v koruně platí

$$m_Z + m_S = 2{,}05\ \text{kg},$$

$$\varrho_Z V_Z + \varrho_S V_S = m_Z + m_S = 2{,}05\ \text{kg},$$

$$V_Z + \varrho_S/\varrho_Z \cdot V_S = (m_Z + m_S)/\varrho_Z = 2{,}05\ \text{kg}/19\ 300\ \text{kg/m}^3 = V_1 = 106\ \text{cm}^3,$$

$$V_Z + 0{,}544 \cdot V_S = 106\ \text{cm}^3.$$

Pro objemy také podle části e) platí

$$V_Z + V_S = 130\ \text{cm}^3.$$

Řešením vychází

$$V_Z = 77{,}4\ \text{cm}^3 = 7{,}74 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3,$$

$$V_S = 52{,}6\ \text{cm}^3 = 5{,}26 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3.$$

Vynásobením hustotou určíme hmotnosti zlata a stříbra

$$m_S = V_S \cdot \varrho_S = 5{,}26 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 \cdot 10\,500\ \mathrm{kg/m}^3 = 0{,}553\ \mathrm{kg\ stříbra;}$$

$$m_Z = V_Z \cdot \varrho_Z = 7{,}74 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 \cdot 19\,300\ \mathrm{kg/m}^3 = 1{,}493\ \mathrm{kg\ zlata.}$$

3 body

FO56E2–4: Led na zimním stadionu

a) Objem vrstvy ledu vychází $V = 30\ \mathrm{m} \cdot 60\ \mathrm{m} \cdot 0{,}04\ \mathrm{m} = 72\ \mathrm{m}^3$. **1 bod**

b) Při chlazení musíme vodu ochladit na teplotu tuhnutí, potom přeměnit na led a vzniklý led ochladit na provozní teplotu. Hmotnost ledu vychází

$$m = \varrho V = 920\ \mathrm{kg/m}^3 \cdot 72\ \mathrm{m}^3 = 66\,240\ \mathrm{kg}.$$

Pro příslušná tepla, které musíme vodě odebrat platí:

i) ochlazení vody

$$Q_1 = mc_1(t_{12} - t_0) = 66\,240\ \mathrm{kg} \cdot 4\,200\ \mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot (12\ °\mathrm{C} - 0°\mathrm{C}) = 3{,}34\ \mathrm{GJ};$$

ii) přeměna vody na led

$$Q_2 = ml_t = 66\,240\ \mathrm{kg} \cdot 330\,000\ \mathrm{J/kg} = 21{,}86\ \mathrm{GJ};$$

iii) ochlazení ledu

$$Q_3 = mc_2(t_0 - t_{-4}) = 66\,240\ \mathrm{kg} \cdot 2\,100\ \mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot [0\ °\mathrm{C} - (-4°\mathrm{C})] = 556\ \mathrm{MJ}.$$

Celkem musíme odebrat teplo

$$Q = Q_1 + Q_3 + Q_3 = 25{,}76\ \mathrm{GJ}.$$ **5 bodů**

c) Při ploše stadionu $S = 60\ \mathrm{m} \times 30\ \mathrm{m} = 1\,800\ \mathrm{m}^2$ připadne na jednotku plochy teplo

$$Q' = Q/S = 25{,}76\ \mathrm{GJ}/1\,800\ \mathrm{m}^2 = 14{,}3\ \mathrm{MJ/m}^2.$$ **1 bod**

d) Pro dobu zmrazení vody na led při provozní teplotě vychází

$$\tau_1 = Q/P_1 = 25\,760\,000\,000\ \mathrm{J}/290\,000\ \mathrm{W} = 88\,828\ \mathrm{s} = 24{,}7\ \mathrm{h}.$$ **2 body**

e) Pro dobu zmrazení vody na led při provozní teplotě při novém zařízení s větším chladicím výkonem dostáváme

$$\tau_1 = Q/P_2 = 25\,760\,000\,000\ \mathrm{J}/520\,000\ \mathrm{W} = 49\,538\ \mathrm{s} = 13{,}8\ \mathrm{h}.$$ **1 bod**